Programme de colles

du 8 au 12/4/2024

- Cette semaine : <u>1</u> question de cours en Maths.
- Sur les espaces vectoriels, uniquement les questions de cours cette semaine.
- Bonnes vacances à toutes et à tous !

1. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVATION

- **Compléments sur la continuité.** Rappel sur : la continuité, à droite à gauche, opérations sur les fonctions continues, théorème de la bijection. Prolongement par continuité d'une fonction, fonctions continues.
- **Grands théorèmes de continuité.** Théorème des valeurs intermédiaires, algorithme de dichotomie pour résoudre $f(x) = 0$ de manière approchée. Théorème des bornes atteintes, retour sur le théorème de la bijection.
- **Compléments sur la dérivation.** Rappel sur : la dérivabilité, à droite et à gauche, opérations sur les fonctions dérivables, tangente. Dérivées successives.
- **Grands théorèmes de dérivation.** Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis, preuve du résultat sur le signe de la dérivée et la monotonie.

Attention

L'inégalité des accroissements finis est hors-programme.

+ RÉVISIONS SUR LES SUITES IMPLICITES ET RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$ *Pour les colleurs : merci d'aller au plus simple sur les suites choisies, l'essentiel du temps doit être passé sur la dichotomie et l'égalité des accroissements finis.*

- **Révisions sur les suites implicites <u>avec 1 question au moins demandant le n-ième terme de la suite selon l'algorithme de dichotomie.</u>** *(Pour les élèves : revoir a minima l'exemple de suite implicite présent à la fin du cours sur les suites, et bien sûr l'algorithme de dichotomie)*
- **Révisions sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ <u>avec 1 question utilisant l'égalité des accroissements finis</u>** *(Pour les élèves : revoir a minima l'exemple présent à la fin du cours de compléments sur la continuité et la dérivation, appelé « étude d'une suite récurrente »)*

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. On note $F = \mathrm{Vect}(X, Y) \subset \mathbb{R}^4$ où $X = (1,2,1,1)$ et $Y = (0,1,1,1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.
2. On note $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \mid x+y+z+t = 0,\ x = y\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, *i.e.* une écriture en Vect.
3. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Montrer, en utilisant la définition, que l'ensemble
$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
4. Étudier la continuité de $h : x \longmapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
5. Fonction Python résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où f est une fonction continue changeant de signe sur $[a,b]$. Expliquer comment utiliser cette fonction pour calculer une valeur approchée de π à une précision fixée.
6. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue. Alors montrer que f admet un *point fixe* c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
7. Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ *(pour les élèves, on médite plusieurs heures le panneau attention qui suit ladite définition ...)* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\ln(x)$. Montrer que f se prolonge en zéro par continuité, et montrer que le prolongement est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
8. Citer le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis. Interpréter géométriquement sur deux dessins distincts.
9. Montrer à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0,x]$ pour tout $x > 0$) que : $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les espaces vectoriels, en entier.