Chapitre (AN) 8 Développements limités

1 Notion de négligeabilité .....
2 Développements limités .....
3 Opérations sur les développements limités .....
4 Application des développements limités .....
5 Exercices .....

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de développement limité, qui permet notamment d'obtenir des approximations de fonctions à l'aide de fonctions polynomiales. On généralise l'approximation du premier ordre « $f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$ » par la tangente connue depuis longtemps pour une fonction une fois dérivable.

Le calcul infinitésimal, [...], est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que celui des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher. »

— Jean Dieudonné (1906–1992)

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ❤.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Commençons par un premier exemple, accessible avec la seule formule de somme de termes géométriques.

Exemple 1 **(Introductif : développement limité de $x \longmapsto 1/1-x$)** Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$1+x+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\iff \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)} = \underbrace{1+x+\ldots+x^n}_{\text{Polynôme } P_n(x)} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{\substack{\text{Ecart entre} \\ f(x) \text{ et } P_n(x)}}$$

$$\iff \frac{1}{1-x} = 1+x+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0.$$

Par exemple, on obtient pour :

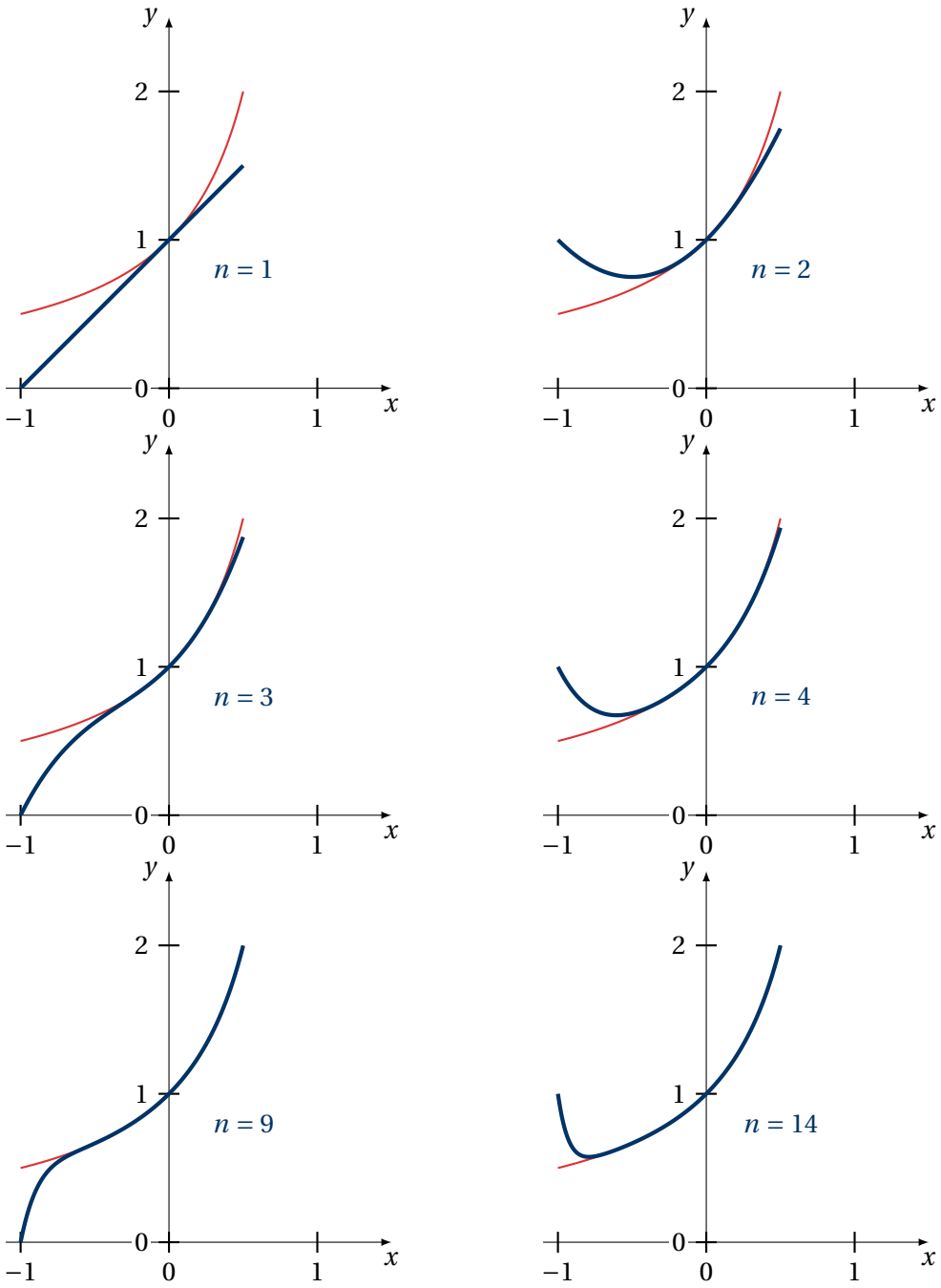
- pour $n=1$: $\frac{1}{1-x} = \underbrace{1+x}_{P_1(x)} + x\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$.
- Pour $n=2$: $\frac{1}{1-x} = \underbrace{1+x+x^2}_{P_2(x)} + x^2\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$.

Les égalités précédentes s'interprètent géométriquement : les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \longmapsto 1+x+\cdots+x^n$ ont tendance à se « rapprocher » lorsque n grandit, en d'autres termes $1+x+\ldots+x^n$ est une « bonne » approximation polynomiale de $\frac{1}{1-x}$ au voisinage de 0 (voir Figure 1). On dit que l'on a obtenu un *développement limité* à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $\frac{1}{1-x}$ en 0.

Cadre

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire :

- **I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.**
- **Pour $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{V}_a$ désignera « un voisinage de x_0 » (donc un intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ si $x_0 \in \mathbb{R}$, $]A,\infty[$ (*resp.* $]-\infty, A[$) si $x_0 = \infty$ (*resp.* $-\infty$).**



APPROXIMATION DE $x \longmapsto 1/1-x$ PAR LE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ GÉOMÉTRIQUE POUR DIFFÉRENTES VALEURS DE n

1. NOTION DE NÉGLIGEABILITÉ

Avant d'étudier les développements limités, on doit compléter notre étude des relations de comparaison (dont les équivalents en font partie) avec celle des « petit o ».

1.1. Définition

Définition 1 | Relation de négligeabilité

- **[Fonctions]** Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (ou au bord de I). On dit que f *est négligeable devant* g *en* x_0, et on note $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, ou encore $f = \underset{x_0}{o}(g)$, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que :
$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{au voisinage de } x_0, \quad \text{et :} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0.$$
Autrement dit, si g **ne s'annule pas au voisinage de** x_0, la relation signifie :
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}.$$
- **[Suites]** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites. On dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n), et on note $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n)$, s'il existe une suite (ε_n) telle que :
$$u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{pour } n \text{ assez grand}, \quad \text{et :} \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Autrement dit, si (v_n) **ne s'annule pas à partir d'un certain rang**, la relation signifie :
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}.$$

Remarque 1

- Ce qui va nous intéresser dans ce chapitre, c'est surtout la négligeabilité par rapport aux fonctions du type $x \longmapsto x^n$ $(n \geqslant 0)$ ou suites du type $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ $(\alpha > 0)$.
- Pour l'objet apparaissant à droite du symbole petit o, on dit parfois aussi qu'il est *prépondérant* sur l'autre.
- Contrairement aux fonctions équivalentes, l'ordre est important dans les symboles. En effet, on a toujours :
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x),$$
mais ce n'est pas vrai pour la négligeabilité,
$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \not\Longleftrightarrow g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(f(x)).$$
On dit que le symbole $\sim$ est symétrique alors que le petit o ne l'est pas. La

même remarque s'applique pour les suites.

Exemple 2 (Fonctions)

1. Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Laquelle de ces fonctions est négligeable par rapport à l'autre en $+\infty$? Et en 0?

2. Montrer que : $x = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$, $\dfrac{1}{x} = \underset{x\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. Montrer que : $(\cos(x)-1)\sin(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Exemple 3 (Suites) Soient $(u_n)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1} = \left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1} = \left(\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 0}$. Étudier les relations de négligeabilité entre ces suites.

1.2. Propriétés

Cadre

Dans cette sous-section, x_0 désignera un élément de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Les différentes preuves sont faites pour les fonctions, mais celles relatives aux suites sont très similaires.

Remarque 2 Pour ne pas se tromper dans la compréhension des petit o, toujours se ramener à la définition en cas de doute :

$$\underset{x\to 0}{o}(g(x)) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0 \quad \textbf{(Choix 1)}$$
$$= g(x)\times \underset{x\to x_0}{o}(1) \quad \textbf{(Choix 2)}.$$

Proposition 1 | Petit o et limite

- **[Fonctions]** Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (ou au bord de I). Alors :
$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1) \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$
- **[Suites]** Soit (u_n) une suite. Alors : $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(1) \iff \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Preuve Par exemple, pour les fonctions :

$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Proposition 2 | Petit o et équivalent

- **[Fonctions]** Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (ou au bord de I). Alors :
$$f(x) = g(x) + \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \iff f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x).$$
- **[Suites]** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites. Alors :
$$u_n = v_n + \underset{n\to\infty}{o}(v_n) \iff u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n.$$

Preuve Par exemple, pour les fonctions, dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0.

$$f(x) = g(x) + \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \iff f(x) - g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$$
$$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
$$\iff f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x).$$

Exemple 4 **(Équivalents usuels sous forme de petit o)** Avec cette propriété, on peut reformuler les équivalents déjà établis dans le Chapitre (AN) 6.

- $\sin x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- $\tan x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$
- $\arctan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
- Pour tout $\alpha \neq 0$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. En particulier :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x), \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + \underset{x\to 0}{o}(x), \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Nous verrons plus tard que ces égalités fournissent en fait des « développements limités ». Détaillons les deux formules ci-après.

- $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$,

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Petit o et opérations.

Voyons maintenant les principales propriétés de ce nouveau symbole.

Proposition 3 | Petit o et opérations usuelles pour les fonctions

Soient $f, g, h, a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in I$ (ou au bord de I), et $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^\star$.

- **[Absorbance]** Soit $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$\underset{x\to x_0}{o}(\lambda \times g(x)) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)), \quad \lambda \times \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)).$$

Note | *Une constante λ est donc « absorbée » à l'intérieur ou à l'extérieur du petit o*

- **[Somme]** $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)) \\ g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)) \end{cases} \Longrightarrow f(x) + g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$.

Note | *Il est très important que ce soit la même fonction h à droite*

- **[Transitivité]** $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \\ g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)) \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$.
- **[Valeur absolue]** $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \Longrightarrow |f(x)| = \underset{x\to x_0}{o}(|g(x)|)$.
- **[Multiplication]** $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(a(x)) \\ g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(b(x)) \end{cases} \Longrightarrow f(x).g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(a(x).b(x))$.
- **[Exposant]**
  - ◇ Si $k \in \mathbb{N}^\star$: $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \Longrightarrow f(x)^k = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)^k)$.
  - ◇ Si $\alpha \in]0, \infty[$ et si les fonctions sont > 0 au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \Longrightarrow f(x)^\alpha = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)^\alpha).$$

Preuve Pour démontrer ces propriétés, il est aisé de raisonner avec la définition faisant appel à une fonction ε. Dans la suite, on notera ε, η deux fonctions définies au voisinage de x_0 et convergeant vers zéro, qui correspondront implicitement à l'équivalent donné en hypothèse.

- **[Absorbance]** Soit ε tendant vers zéro en x_0 telle que $\underset{x_0}{o}(g) = \varepsilon g$, alors $\lambda \underset{x_0}{o}(g) = (\lambda\varepsilon)g$. Comme $\lambda\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$, on a montré que : $\lambda \underset{x_0}{o}(g) = \underset{x_0}{o}(g)$. Le même raisonnement s'applique pour $\underset{x_0}{o}(\lambda g)$.
- **[Somme]** On suppose $f = \varepsilon h$ et $g = \eta h$ au voisinage de x_0, donc $f + g = (\varepsilon + \eta)h$ et $\varepsilon(x) + \eta(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$. D'où l'équivalent.
- **[Transitivité]** On suppose $f = \varepsilon g$ et $g = \eta h$ au voisinage de x_0, donc $f = (\varepsilon\eta)h$ et $\varepsilon(x)\eta(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$. D'où l'équivalent.
- **[Valeur absolue]** On suppose $f = \varepsilon g$ au voisinage de x_0, alos $|f| = |\varepsilon||h|$ et $|\eta(x)| \xrightarrow{x\to x_0} 0$. D'où l'équivalent.
- **[Multiplication]** On suppose $f = \varepsilon a$ et $g = \eta b$ au voisinage de x_0, alos $fg = (\varepsilon\eta)(ab)$ et $\varepsilon(x)\eta(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$. D'où l'équivalent.
- **[Exposant]** Traitons le cas $k \in \mathbb{N}^\star$ par exemple. On suppose $f = \varepsilon a$ et $g = \eta b$ au voisinage de x_0, alors $fg = (\varepsilon\eta)(ab)$ et $\varepsilon(x)\eta(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$. D'où l'équivalent.

Proposition 4 | Petit o et opérations usuelles pour les suites

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n)$ des suites non nulles à partir d'un certain rang et $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^\star$.

- **[Absorbance]** Soit $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$\underset{n\to\infty}{o}(\lambda \times u_n) = \underset{n\to\infty}{o}(v_n), \quad \lambda \times \underset{n\to\infty}{o}(g(x)) = \underset{n\to\infty}{o}(v_n).$$

Note | *Une constante λ est donc « absorbée » à l'intérieur ou à l'extérieur du petit o*

- **[Somme]** $\begin{cases} u_n &= \underset{n\to\infty}{o}(w_n) \\ v_n &= \underset{n\to\infty}{o}(w_n) \end{cases} \implies u_n + v_n = \underset{n\to\infty}{o}(w_n).$

  Note | *Il est très important que ce soit la même suite v à droite*

- **[Transitivité]** $\begin{cases} u_n &= \underset{n\to\infty}{o}(v_n) \\ v_n &= \underset{n\to\infty}{o}(w_n) \end{cases} \implies u_n = \underset{n\to\infty}{o}(w_n).$
- **[Valeur absolue]** $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n) \implies |u_n| = \underset{n\to\infty}{o}(|v_n|).$
- **[Multiplication]** $\begin{cases} u_n &= \underset{n\to\infty}{o}(a_n) \\ v_n &= \underset{n\to\infty}{o}(b_n) \end{cases} \implies u_n.v_n = \underset{n\to\infty}{o}(a_n.b_n).$
- **[Exposant]**
  - ◇ Si $k \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n) \implies u_n^k = \underset{n\to\infty}{o}(v_n^k)$.
  - ◇ Si $\alpha \in]0,\infty[$ et si les suites sont > 0 au voisinage à partir d'un certain rang :

    $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n) \implies u_n^\alpha = \underset{n\to\infty}{o}(v_n^\alpha)$.

Nous avons vu notamment qu'on ne peut faire de quotients de petit o, en règle générale. Cela est en revanche possible pour des monômes.

Proposition 5 | Règles spécifiques aux monômes de fonctions

Soient n et p deux entiers naturels. Alors :

- **[Multiplication]** $\begin{cases} x^n \times \underset{x\to0}{o}(x^p) &= \underset{x\to0}{o}(x^{n+p}), \\ \frac{o_{x\to0}(x^n)}{x^p} &= \underset{x\to0}{o}(x^{n-p}). \end{cases}$
- **[Addition]** $\underset{x\to0}{o}(x^n) + \underset{x\to0}{o}(x^p) = \underset{x\to x_0}{o}\left(x^{\min(n,p)}\right)$.

Attention à la puissance limitante d'une somme

Dans une somme, on est obligé de garder l'ordre le plus limitant ! Exemple : au voisinage de 0, on a $x^3 = \underset{x\to0}{o}(x^2)$ et $x^4 = \underset{x\to0}{o}(x^3)$, mais :

- $x^3 + x^4 \neq \underset{x\to0}{o}(x^3)$, puisque $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3+x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to0}(1+x) = 1 \neq 0$.
- En revanche, $x^3 + x^4 = \underset{x\to0}{o}(x^2)$, puisque $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3+x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}(x+x^2) = 0$.

Preuve

- ✎

- ✎

Attention On ne peut simplifier des petit o

Si par exemple $f(x) = \underset{x\to0}{o}(x^3)$ et $g(x) = \underset{x\to0}{o}(x^3)$ alors $f(x) - g(x) = \underset{x\to0}{o}(x^3)$ et non 0 !

En effet si $f(x) = \underset{x\to0}{o}(x^3)$ et si $g(x) = \underset{x\to0}{o}(x^3)$, il existe alors deux fonctions ε_1 et ε_2 définies au voisinage de 0 et qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 telles que $f(x) = x^3\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = x^3\varepsilon_2(x)$. Alors : $f(x) - g(x) = x^3(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = \underset{x\to0}{o}(x^3)$ mais rien ne dit, et cela ne sera généralement pas le cas, que $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$.

Exemple 5 En utilisant les propriétés précédentes, simplifier les expressions ci-dessous en les écrivant sous forme d'un unique petit o.

1. $\underset{x\to0}{o}(4x^3) - 3 \times \underset{x\to0}{o}(x^3)$,

   ✎

2. $\left(\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)^4 + 2 \times \dfrac{o_{x\to0}(x^7)}{x^2}$.

   ✎

On a des règles analogues pour les suites.

Proposition 6 | Règles spécifiques aux monômes de suites

Soient p et q deux entiers naturels. Alors :

- **[Multiplication]** $\dfrac{1}{n^p} \times \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^q}\right) = \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{p+q}}\right)$, $\dfrac{o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^q}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{p-q}}\right)$.
- **[Addition]** $\underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^p}\right) + \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^q}\right) = \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\min(p,q)}}\right)$.

Le résultat de changement de variable pour les limites et équivalents reste valable pour les petit o.

Proposition 7 | Changement de variable dans un équivalent

- **[Fonctions]** Soient I, J deux intervalles et $x_0 \in$ I (ou au bord de I) ainsi que $y_0 \in$ J (ou au bord de J). On considère trois fonctions $f : \text{J} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \text{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \text{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \varphi(x) \xrightarrow{x\longrightarrow x_0} y_0 \\ \textbf{(ii)} & f(y) = o_{y\to y_0}(g(y)) \end{cases} \Longrightarrow f(\varphi(x)) = \underset{x\to x_0}{o}(g(\varphi(x))).$$
- **[Suites]** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites, et (a_n) une suite à valeurs entières telle que $a_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \infty$. Alors :
$$u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n) \Longrightarrow u_{a_n} = \underset{n\to\infty}{o}\left(v_{a_n}\right).$$

On peut retenir que l'on peut faire des « changements de variable » dans des petits o : ici, poser « $y = \varphi(x)$ », ou dans les suites remplacer « n » par n'importe quelle suite (a_n) tendant vers $+\infty$. Ce résultat de changement de variable permet d'étendre les règles des petit o (Proposition 5).

Corollaire 1 | Règles spécifiques aux monômes de fonctions (en un point quelconque)

Soient n et p deux entiers naturels. Alors :

- **[Multiplication]** $\begin{cases} (x-x_0)^n \times \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^p) = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n+p}) \\ \frac{o_{x\to x_0}((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^p} = \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^{n-p}). \end{cases}$
- **[Addition]** $\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^p) = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{\min(n,p)}\right)$.

2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Comme nous l'avons vu dans l'Exemple 1, il est parfois possible d'approcher des fonctions par un polynôme. Nous avions obtenu :
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$
C'est une écriture présentant une partie polynomiale, puis un terme de petit o.

2.1. Définitions

Vous connaissez en fait déjà le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable en n'importe quel point. Il provient de la notion de fonction dérivable reformulée avec petit o.

- Si f est dérivable en 0, alors :
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0) = \underset{x\to 0}{o}(1)$$
$$\Longleftrightarrow f(x) = f(0) + x\left(f'(0) + \underset{x\to 0}{o}(1)\right)$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{f(x) = \underbrace{f(0)}_{:=a_0} + x\underbrace{f'(0)}_{:=a_1} + \underset{x\to 0}{o}(x)}.$$
La dernière égalité affirme que f est proche d'un polynôme de degré 1 noté $a_0 + a_1 X$, avec un terme correctif en petit o.
- Faisons de-même en un autre point x_0. Si f est dérivable en x_0, alors :

Définition 2 | Développement limité au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $0 \in I$ (ou au bord de I). On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* 0, ce que l'on note en abrégé « f admet un $DL_n(0)$ », s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel quxe :

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}_{=P(x)} + \underset{x\to 0}{o}(x^n). \end{aligned}$$

On dit que :

- $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ est *la partie régulière* du développement limité,
- l'entier n est appelé l'*ordre* du développement limité.

Exemple 6 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x)$. Montrer que f admet un $DL_3(0)$. *(Il s'agit ici d'isoler une partie polynomiale, et de montrer que le reste est un petit o.)*

Plus généralement, on définit la notion de développement limité en n'importe quel point.

Définition 3 | Développement limité au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (ou au bord de I). On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0*, ce que l'on note en abrégé « f admet un $DL_n(x_0)$ », s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) \\ &= \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n}_{=P(x-x_0)} + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n). \end{aligned}$$

On dit que :

- $P(X - x_0) = a_0 + a_1(X - x_0) + \ldots + a_n(X - x_0)^n$ est *la partie régulière* du développement limité,
- l'entier n est appelé l'*ordre* du développement limité.

Exemple 7 Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - 1 + (x-2)\arctan(x-2)$. Montrer que g admet un $DL_1(2)$.

Remarque 3 Si f possède un $DL_n(x_0)$ (avec $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n),$$

alors : $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = a_0$ (par conséquent, si f n'a pas de limite en x_0, alors f ne possède pas de développement limité en x_0).

Exemple 8 Justifier que la fonction $g : x \longrightarrow \cos\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\right)$ n'a pas de développement limité en deux.

Définition 4 | Développement limité au voisinage de $+\infty$

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$, et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n en $+\infty$*, ce que l'on note en abrégé « f admet un

DL$_n(+\infty)$ », s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, une fonction ε définie au voisinage de $+\infty$ tels que :

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \underbrace{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}_{=P\left(\frac{1}{x}\right)} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

On dit que :

- $x \longmapsto P\left(\frac{1}{x}\right)$ est *la partie régulière* du développement limité,
- l'entier n est appelé l'*ordre* du développement limité.

Remarque 4 On définit les développements au voisinage de $-\infty$ de la même façon que ceux en $+\infty$.

Exemple 9 Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{\cos x}{x^3}$. Montrer que h admet un DL$_2(+\infty)$.

Dans les trois exemples qui précèdent, le développement limité (sa partie régulière) est apparent ; cela ne sera bien sûr pas le cas dans la vraie vie. On va apprendre plus tard à le trouver.

2.2. Unicité du développement limité

Proposition 8 | Unicité

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction admettant un DL$_n(x_0)$. Alors, ce développement limité est unique.

Remarque 5 On pourra noter l'analogie avec la propriété d'unicité des coefficients d'un polynôme. D'ailleurs, la propriété précédente la généralise.

Preuve On prouve l'unicité par exemple dans le cas $x_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction définie au voisinage de 0 admettant deux DL$_n(0)$ distincts : il existe deux $(n+1)$-listes de réels distinctes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ telles que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to0}{o}(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

Soit alors k le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ vérifiant $a_k \neq b_k$ (k existe car les deux $(n+1)$-listes sont distinctes), en soustrayant les deux égalités précédentes on obtient :

$$0 = (a_k - b_k)x^k + (a_{k+1} - b_{k+1})x^{k+1} + \ldots + (a_n - b_n)x^n + \underset{x\to0}{o}(x^n).$$

Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 et une fonction ε définie sur $\mathcal{V}_0$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad 0 = (a_k - b_k)x^k + (a_{k+1} - b_{k+1})x^{k+1} + \ldots + (a_n - b_n)x^n + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to0}\varepsilon(x) = 0.$$

En divisant par x^k lorsque $x \neq 0$ on a alors :

$$\forall x \in \mathcal{V}_0 \setminus \{0\}, \quad 0 = (a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \ldots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)$$

En passant à la limite lorsque x tend vers 0 dans cette dernière égalité on trouve alors $0 = a_k - b_k$ ce qui est absurde car $a_k \neq b_k$ par définition.

Exemple 10 Dans l'Exemple 4, nous avions montré pour rappel que :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2), \quad \sin(x) = x + \underset{x\to0}{o}(x).$$

1. Justifier que : $\cos(x) = 1 + \underset{x\to0}{o}(x)$.

2. Retrouver alors le fait que (cos, sin) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *(nous avions déjà établi cela dans le Chapitre (ALG) 11, en évaluant en plusieurs x)*

Corollaire 2 | $\mathrm{DL}_n(0)$ et parité

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$.

- Si f est paire, la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$ n'admet que des termes d'ordres pairs.
- Si f est impaire, la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$ n'admet que des termes d'ordres impairs.

Attention

La réciproque est fausse. En effet, la fonction f définie par $f(x) = x + x \times x$ vérifie $f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Elle possède donc un développement limité dont tous les termes sont d'ordre impair, et pourtant elle n'est pas impaire ... (en effet, $f(-1) = 0 \neq -f(1)$).

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Il existe un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0, pouvait être choisi de la forme $]-\eta, \eta[$ (quitte à le réduire) et une fonction ε définie sur $\mathcal{V}_0$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Puisque $x \in \mathcal{V}_0$ si, et seulement si, $-x \in \mathcal{V}_0$ on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad f(-x) &= a_0 + a_1(-x) + \ldots + a_n(-x)^n + (-x)^n \varepsilon(-x) \\ &= (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n x^n + x^n \underbrace{(-1)^n \varepsilon(-x)}_{\varepsilon_2(x)}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ on a $\lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et obtient alors le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f(-x)$:

$$f(-x) = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

- Si f est paire on a $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ et donc :
  $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = (-1)^0 a_0 + (-1)^1 a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$
  On a donc par unicité du développement limité, $a_k = (-1)^k a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ soit $a_k = 0$ si k est impair.
- Si f est impaire on a $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ et donc :
  $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = -(-1)^0 a_0 - (-1)^1 a_1 x - \ldots - (-1)^n a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$
  On a donc par unicité du développement limité, $a_k = -(-1)^k a_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ soit $a_k = 0$ si k est pair.

2.3. Développements limités usuels (en $x_0 = 0$)

AUTOUR DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ GÉOMÉTRIQUE. La formule de sommation de termes géométriques est le premier outil nous permettant d'obtenir des développements limités, comme déjà vu en introduction de chapitre.

Théorème 1 | Développement limité géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.

Preuve D'après la formule sur les sommes de termes géométriques, nous avons pour tout $x \neq 1$ (donc en particulier au voisinage de zéro) : $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \iff \dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Mais $\dfrac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow{x\to 0} 0$ donc : $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, on déduit alors la formule.

Par changement de variable dans les petit o, on déduit alors aisément le corollaire suivant.

Corollaire 3 | Développement limité géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x^2)^n + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$$

Preuve On précise simplement que : $-x \xrightarrow{x\to 0} 0$, $-x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$, $x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$, on conclut ensuite par changement de variable dans le petit o.

Remarque 6 Il n'est pas forcément utile de connaitre par coeur ces trois derniers développements limités, il faut surtout savoir les retrouver à partir du développement limité géométrique.

AUTOUR DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EXPONENTIEL : FORMULE DE TAYLOR.

Le deuxième outil principal est une formule générale du développement limité dans le cas de fonctions $\mathscr{C}^n$.

Théorème 2 | Formule de TAYLOR-YOUNG

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de x_0. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ donné par la formule :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).\end{aligned}$$

On admet ce théorème. On constate que c'est un moyen très efficace d'obtenir toute sorte de développement limité.

Remarque 7

- Remarquons que le $\mathrm{DL}_1(x_0)$ n'est rien d'autre que l'équation de la tangente en la courbe représentative de f en son point x_0.
- La formule de TAYLOR-YOUNG ne s'utilise dans la pratique que pour les fonctions **dont les dérivées successives sont simples**.
- Pour $n = 1$ (ou $n = 2$ pour le cosinus), on retrouve la réécriture des équivalents usuels sous forme de petit o : voir l'Exemple 4.

Exemple 11

- Écrire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de cos.

- Écrire le $\mathrm{DL}_2(1)$ de exp.

Corollaire 4 | Développement limité obtenus par TAYLOR-YOUNG

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).
\end{aligned}$$

Remarque 8 Il peut être utile de garder à l'esprit le cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ à l'ordre 3 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Remarque 9 **(Binôme généralisé)** Le développement

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad (\star)$$

peut être vu comme une formule du « binôme généralisé ». En effet, si α est un entier positif, alors :

- $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \dfrac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} = \binom{\alpha}{k}$ pour tout $k \in [\![0, \alpha]\!]$.
- Donc le développement limité prétend que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

En particulier, pour $n = \alpha$ on retrouve presque la formule du binôme. Ainsi lorsque $n = \alpha$, la formule du binôme donne mieux ($\star$) sans le petit o), et lorsque $n \neq \alpha$ ou que α n'est pas entier positif, on a seulement ($\star$).

Preuve Ces fonctions étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles admettent d'après la formule de TAYLOR-YOUNG un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ plus $\exp^{(k)} = \exp$ donc $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ et on retrouve bien la formule attendue.
- Dans le Chapitre (AN) 6, nous avions établi des formules pour les dérivées successives de cos et sin.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)} = (-1)^k \cos, \quad \cos^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin.$$

En évaluant en zéro, on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k,\ \cos^{(2k+1)}(0) = 0.$$

On retrouve alors bien la formule attendue en utilisant TAYLOR-YOUNG.

- Les formules analogues pour sin sont :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \sin^{(2k)} = (-1)^k \sin,\quad \sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos.$$

En évaluant en zéro, on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \sin^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0,\quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$

On retrouve alors bien la formule attendue en utilisant TAYLOR-YOUNG.

- On pose $f_\alpha : x \longmapsto (1+x)^\alpha$. Alors :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = f_\alpha(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On remarque que $f_\alpha(0) = 1$ et on prouve de plus par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_\alpha^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) f_{\alpha-k}$$
$$\iff f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) f_{\alpha-k}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

On retrouve bien la formule attendue.

Exemple 12

- Par exemple, le $\mathrm{DL}_7(0)$ de sin est donné par

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right).\end{aligned}$$

Remarque intéressante, c'est aussi son DL_8 par un argument de parité.

- Écrire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Exemple 13 (D.L. de tan en zéro (méthode 1 : TAYLOR-YOUNG)) Déterminer un $\mathrm{DL}_2(0)$ de tan en utilisant la formule de TAYLOR-YOUNG. *(Il n'existe pas de formule simple générale pour obtenir le développement limité de* tan *à n'importe quel ordre.)*

En pratique, on n'utilisera presque jamais la formule de TAYLOR-YOUNG pour calculer un développement limité : on utilisera plutôt les développements limités des fonctions usuelles et les règles de calcul détaillées dans la section suivante. Cela nous permettra de ne retenir qu'un petit nombre de développements limités, puis d'en déduire beaucoup d'autres à l'aide d'opérations.

PRIMITIVATION ET CONSÉQUENCES. On admet le théorème de primitivation qui suit.

Théorème 3 | Primitivation de développement limité

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0. On suppose que f' admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de la forme :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)\\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right).\end{aligned}$$

Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(x_0)$ donné par :

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)\\ &= f(x_0) + a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\\ &\quad + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Remarque 10

- Il y a donc une constante qui apparaît que l'on pourrait appeler « constante de primitivation » ; c'est forcément $f(x_0)$ (faire tendre x vers x_0 de chaque côté).
- Notez qu'après primitivation, l'ordre du développement limité est **augmenté** de 1.
- Si vous ne voyez pas de formules à appliquer pour obtenir le développement limité d'une fonction (ou si le calcul semble trop compliqué), il peut être intéressant de dériver la fonction et de voir si le développement limité de la dérivée n'est pas plus facile à obtenir, puis d'intégrer ce développement li-

mité.

Le théorème précédent permet d'obtenir de nouveaux développements limités.

Proposition 9 | Développements limités obtenus par primitivation

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Preuve

- On commence par chercher le $DL_{n-1}(0)$ de sa dérivée : $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n-1}\right).$$

Puisque $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue au voisinage de 0, on obtient d'après la proposition précédente le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$ en primitivant le développement limité précédent :

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

- Faisons de-même en commençant par écrire le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exemple 14 (D.L. de tan en zéro (méthode 2 : primitivation)) Déterminer un $DL_5(0)$ de tan en utilisant une technique de primitivation et de l'équivalent usuel en zéro. On sait que :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Or, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, donc :

- $\tan'(x) = 1 + (x + \underset{x\to 0}{o}(x))^2 = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. *Par primitivation (*tan *est $\mathscr{C}^\infty$ et* $\tan(0) = 0$*), il vient :* $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$.
- *Or,* $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. *Donc :*

$$\tan'(x) = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)^2 = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

- *Par primitivation (*tan *est $\mathscr{C}^\infty$ et* $\tan(0) = 0$*), il vient :*

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

Exemple 15

1. Écrire le $DL_n(0)$ de $f : x \longmapsto \ln(1-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer le $DL_5(0)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$ en utilisant une technique de primitivation.

3. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Contrairement aux équivalents, les développements limités sont des *égalités* (avec un reste inconnu), on peut donc leur appliquer les opérations usuelles. Il y aura donc beaucoup plus de manipulations permises que pour les équivalents.

Remarque 11 Afin de simplifier les notations, les résultats de cette partie seront établis pour les DL au voisinage de 0, mais ils restent valables pour les DL au voisinage de tout $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

3.1. Troncature, Combinaison linéaire & Produit

Proposition 10 | Troncature

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Alors pour tout p vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$, f admet un $DL_p(0)$ donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^p).$$

Remarque 12 On obtient donc les développements limités d'ordre inférieur en arrêtant (*i.e.* en « tronquant ») la partie régulière à l'ordre souhaité.

Preuve

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots a_p x^p + x^p \underbrace{(a_{p+1}x \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x))}_{\varepsilon_2(x)} \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0 \\ &= a_0 + a_1 x + \ldots a_p x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^p). \end{aligned}$$

Exemple 16 On a vu que la fonction f définie par : $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + x^3\ln(1+x)$ admet un $DL_3(0)$: $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Donc f admet un $DL_2(0)$ et un $DL_1(0)$. Écrivons-les.

Proposition 11 | Combinaison linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g deux fonctions admettant un $DL_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = P_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad g(x) = Q_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad P_n, Q_n \in \mathbb{R}_n[X].$$

Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Remarque 13 On obtient donc le développement limité d'une somme en sommant les parties régulières des $DL_n(0)$ de f et de g.

Preuve Soient $P_n, Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et soient deux fonctions ε_1, ε_2 telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) \ \underline{\text{et}} \ g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

On a alors au voisinage de 0 :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)) + x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\varepsilon_3(x)} \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$$

Ce qui est bien le $DL_n(0)$ de $f+g$ car $\lambda P_n + \mu Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 17 Supposons que $f(x) = 2 - x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $g(x) = -x + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Déterminer le $DL_3(0)$ de $f - 2g$.

Exemple 18 Calculer le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto e^x - \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Attention **Problème d'ordre**

Il est absolument nécessaire pour obtenir le développement limité de $\lambda f + \mu g$ à l'ordre n d'écrire les développements limités de f et de g *au moins* jusqu'à l'ordre n ; dans le cas contraire il manquera des termes dans la partie régulière et le développement limité sera donc faux.

Proposition 12 | Produit

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad \mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].$$

Alors $f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par :

$$f(x) \times g(x) = \mathrm{R}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

où : R_n est le polynôme $\mathrm{P}_n \times \mathrm{Q}_n$ où l'on a gardé que les termes de degré $\leqslant n$.

Preuve Soient $\mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et soient deux fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ telles que au voisinage de 0 :

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + x^n\varepsilon_1(x), \quad g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + x^n\varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

On a alors au voisinage de 0 :

$$f(x) \times g(x) = \mathrm{P}_n(x) \times \mathrm{Q}_n(x)) + x^n(\mathrm{P}_n(x)\varepsilon_2(x) + \mathrm{Q}_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))$$

On pose alors $\mathrm{P}_n(x) \times \mathrm{Q}_n(x)) = \mathrm{R}_n(x) + \mathrm{S}_n(x)$ où R_n est composé de tous les termes de $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ de degré $\leqslant n$ et S_n est composé de tous les termes de $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ de degré $\geqslant n+1$, on peut donc écrire $\mathrm{S}_n(x) = x^{n+1}\mathrm{T}_n(x)$ où T_n est encore un polynôme. On a alors au voisinage de 0 :

$$f(x) \times g(x) = \mathrm{R}_n(x) + x^n\underbrace{(x\mathrm{T}_n(x) + \mathrm{P}_n(x)\varepsilon_2(x) + \mathrm{Q}_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x))}_{\varepsilon_3(x)}.$$

avec : $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$. Ce qui est bien le $\mathrm{DL}_n(0)$ de fg car : $\mathrm{R}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Exemple 19 Supposons que $f(x) = 2 - x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $g(x) = -x + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de fg.

Attention **Problème d'ordre**

- Il est généralement nécessaire pour obtenir le développement limité de fg à l'ordre n d'écrire les développements limités de f et de g *au moins* jusqu'à l'ordre n ; dans le cas contraire il manquera des termes dans la partie régulière et le développement limité sera donc faux.
- Il est possible parfois de réduire le développement limité de f ou de g, lorsque l'un des deux n'a pas de terme constant.

Exemple 20 Déterminer les développements limités suivants :

1. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^x\cos(x)$.
   - **[Échec]** *(Par exemple en faisant un DL_2 seulement pour l'exponentielle)*
   - **[Réussite]**

2. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto (x^2+x)\ln(1+x)$.

- **[Réussite]**

- **[Réussite optimale]** Écrire un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$ aurait été suffisant (car x^2+x n'a pas de terme constant).

3. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$. *(Remarque :un quotient est un produit!)*

4. Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$. *(Remarque :un quotient est un produit!)*

5. Calculer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{x}$.

6. Retrouver le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$ en utilisant cette fois un produit.

Méthode (AN) 8.1 **(Faire apparaître une expression dont on connaît le DL)**

- *Pour $a \neq 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\dfrac{1}{a+x}$ *?* On connaît celui de $\dfrac{1}{1+x}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise le dénominateur par a :
$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\ln(a+x)$ *?* On connaît celui de $\ln(1+x)$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par a dans le logarithme puis on applique la formule : « $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ » :
$$\ln(a+x) = \ln\left(a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{x}{a}\right).$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\sqrt{a+x}$ *?* On connaît celui de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par a dans la racine carrée :
$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x}{a}}.$$
- *Pour $a \neq 0$, comment obtenir un* DL(0) *de* e^{a+x} *?* On connaît celui de e^x. On applique la formule « $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$ » :
$$\mathrm{e}^{a+x} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^x.$$

Exemple 21 Déterminer les développements limités suivants

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{1}{3-x}$.

2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin(2x)\ln(2+x)$.

3. $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2+x}$.

3.2. Composée & Quotient

Commençons par une remarque préliminaire pour mieux comprendre les mélanges de petit « o » qui vont provenir des composées de DL.

Remarque 14 **(Nettoyages des o)** Simplifier les petits o ci-dessous.

1. $\underset{x\to 0}{o}\left(x^3-2x^4+x^5+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)$.

2. $\underset{x\to 0}{o}\left(x+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)$ et $\underset{x\to 0}{o}\left(x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^7\right)\right)$.

Dans la pratique, on écrira simplement la réponse finale de ces simplifications, sans trop détailler.

Pour la composition et le quotient nous n'utiliserons jamais de résultat tout fait en pratique, il faut uniquement savoir les mettre en place sur des exemples.

Méthode (AN) 8.2 **(Développement limité d'une composée)** Pour obtenir un développement limité de $g=f\circ u$ au voisinage de zéro, on :

1. cherche généralement un développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre n, sous la forme : $f(x)=\mathrm{P}_n(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$, $\mathrm{P}_n\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. On justifie que $u(x)\xrightarrow{x\to 0}0$ *(Attention à ne pas négliger cette étape! comme pour les équivalents)*
3. Par composition des limites, on a alors : $g(x)=f(u(x))=\mathrm{P}_n(u(x))+\underset{x\to 0}{o}\left(u(x)^n\right)$, puis en exploitant le développement limité de g on simplifie l'expression précédente jusqu'à obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g=f\circ u$.

Exemple 22 Supposons que $f(x)=2-x+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ et $u(x)=-x+\dfrac{x^3}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$. Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f\circ u$.

Exemple 23 Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x\longmapsto\cos\left(2x^2\right)$. *(tentons d'utiliser un développement limité de* cos *à l'ordre 4, on verra ensuite a posteriori si cela était le plus judicieux...)*

Exemple 24 Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$.

Exemple 25 On note $f : x \longmapsto \ln(\cos x)$ pour x dans son domaine de définition.

1. Déterminer le domaine de définition de f et justifier qu'elle admet un $\mathrm{DL}_4(0)$.

2. Déterminer ce développement limité.

Méthode (AN) 8.3 **(Développement limité d'un quotient)** Le point le plus important à retenir est le suivant : *pour obtenir le développement limité d'un quotient, il faut utiliser la composition avec le développement limité en 0 de* $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$. Plus précisément :

- pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$ il faut *via* des factorisations obtenir une écriture de la forme $\dfrac{1}{1 \pm f(x)}$ avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. Il reste alors à composer le développement limité en 0 de f avec celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$.
- Pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{h(x)}{g(x)}$, on écrit $\dfrac{h(x)}{g(x)} = h(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ et on fait le produit du DL en 0 de h avec celui de $\dfrac{1}{g}$.

Attention à l'ordre

- Il arrive parfois que pour mettre $\dfrac{1}{g(x)}$ sous la forme $\dfrac{1}{1 \pm f(x)}$, il soit nécessaire de factoriser par un terme de la forme $\dfrac{1}{x^k}$; pour obtenir le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{g}$ à l'ordre n il faudra alors écrire celui de $\dfrac{1}{1 \pm f}$ à l'ordre $n + k$.
- Ce cas de figure se présente par exemple lorsque le dénominateur contient

des termes en sin, tan, arctan ou ln.

Exemple 26 Supposons que $f(x) = 2 - x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $g(x) = -x + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\frac{g}{f}$.

Exemple 27

1. Calculer le $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \frac{e^x}{1+x^2}$.

2. Calculer le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$.

Exemple 28 **(D.L. de tan en zéro (méthode 3 : quotient))** Déterminer un $DL_5(0)$ de tan en utilisant un quotient.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}.$$

- On commence par chercher le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\cos}$. Puisque la fonction en question est paire, on en aura même un $DL_5(0)$.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \quad \text{soit :} \quad \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - o_{x\to 0}(x^5)\right)}_{:=y}}.$$

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) = 0$, *et :*

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5),$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)^2 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).\end{aligned}$$

- Reste à multiplier ceci par le $\mathrm{DL}_5(0)$ de sin : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)\right)\\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5).\end{aligned}$$

3.3. Changement de point

Dans cette sous-section, on explique comment passer d'un développement limité au voisinage de zéro à un développement limité en un point quelconque.

PASSER D'UN POINT FINI À ZÉRO. On ramènera les développements limités au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ à des développements limités au voisinage de 0 avec le changement de variable $h = x - x_0$:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n\\ &\quad + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}((x-x_0)^n)\\ \iff g(h) := f(x_0+h) &= a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n).\end{aligned}$$

$h = x - x_0$ $\quad$ $x = x_0 + h$

Exemple 29 **(cas $x_0 \in \mathbb{R}$)**

- Déterminer un $\mathrm{DL}_3(1)$ de ln.

- Déterminer un $\mathrm{DL}_3(2)$ de exp.

PASSER D'UN POINT INFINI À ZÉRO. On ramènera les développements limités au voisinage de $+\infty$ à des développements limités au voisinage de 0 avec le changement de variable $h = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^n}\right)\\ \iff g(h) := f\left(\frac{1}{h}\right) &= a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + \underset{h\to 0^+}{\mathrm{o}}(h^n).\end{aligned}$$

$h = \frac{1}{x}$ $\quad$ $x = \frac{1}{h}$

Concrètement, le développement limité en 0^+ s'obtient à partir de celui en zéro en faisant simplement tendre h vers par la droite. Le même raisonnement vaut pour $-\infty$ cherchant un développement limité en 0^-.

Remarque 15 Si une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, telle que $g : h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors f possède un $\mathrm{DL}_n(\pm\infty)$ donc les coefficients sont les mêmes que ceux du $\mathrm{DL}_n(0)$ de g.

Exemple 30 **(cas $x_0 = \pm\infty$)**

1. Déterminer un $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $f : x \longmapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. Déterminer un $\mathrm{DL}_2(-\infty)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$.

3. Déterminer un $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$.

En résumé, voici la méthode générale.

Méthode (AN) 8.4 **(Se ramener à zéro à partir de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)**

- Si $x_0 \neq 0$ et $x_0 \notin \{\pm\infty\}$, alors la recherche d'un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ pour une fonction f se fera en se ramenant au voisinage de 0 par le changement de variable « $h = x - x_0$ ». Plus précisément,
  1. considérer $g : h \longmapsto f(x_0 + h)$,
  2. faire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g : on obtient une expression du type
     $$g(h) = \mathrm{R}_n(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$
     avec R_n fonction polynomiale de degré n définie au voisinage de zéro.
  3. Un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f est alors : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{R}_n(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.
- Si $x_0 = \pm\infty$, alors on fait comme précédemment mais pour la fonction $g : h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$

4. APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Nous avons vu que les développements limités étaient compatibles avec énormément d'opérations, *a contrario* des équivalents. Et en plus, nous allons voir qu'un développement limité permet de déterminer des équivalents, et donc des limites.

4.1. Limites et équivalents

Proposition 13 | « D.L. $\Longrightarrow$ équivalent »
Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f admettant un développement limité au voisinage de x_0.
Alors f est équivalente en x_0 au premier terme **non nul** de son $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Preuve On le montre dans le cas d'un $\mathrm{DL}_n(0)$, les autres cas se prouvant de la même façon.
Soit $a_k x^k$ le premier terme non nul du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f ; en tronquant le développement limité à l'ordre k on peut donc écrire au voisinage de 0 : $f(x) = a_k x^k + x^k \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
On a donc au voisinage de 0 : $\dfrac{f(x)}{a_k x^k} = 1 + \dfrac{\varepsilon(x)}{a_k} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et donc : $f(x) \underset{0}{\sim} a_k x^k$.

Remarque 16

- Utiliser les développements limités permet donc de trouver des équivalents de fonctions, et donc de déterminer des limites, que l'on ne pouvait pas traiter jusqu'à présent : si l'on ne peut pas additionner ou composer des équivalents, on peut désormais additionner et composer des développements limités pour ensuite en déduire des équivalents.
- Il faut toutefois prendre garde à l'ordre du développement limité : un ordre trop petit risque de ne donner que des termes nuls, un ordre trop grand conduit à des calculs inutiles.

Exemple 31

1. Donner un équivalent en 0 de $\ln(\cos(x))$. *(On pourra réutiliser le $\mathrm{DL}_4(0)$ précédemment établi)*

2. Donner un équivalent en 0 de $e^x - \cos(x)$.

3. Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^2\sin(x)}$.

- **[Échec]** On tente un $DL_1(0)$ de l'exponentielle.

- **[Échec]** On tente un $DL_2(0)$ de l'exponentielle.

- **[Succès]** On tente un $DL_3(0)$ de l'exponentielle.

4. Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x\left(e^{1/x} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Exemple 32 On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par : $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \dfrac{n+1}{n^2}$.

Montrer que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{3}{2n^2}$.

4.2. Étude locale d'une fonction

Les développements limités vont nous permettre d'étudier localement une fonction : savoir si elle est continue, dérivable, voire même à prolonger des fonctions en un point où elle n'est pas définie, et savoir si le prolongement est continue, dérivable *etc.*.

Proposition 14 | Développement limité, continuité & dérivabilité

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ (f est donc **définie en** x_0).

- f est continue en $x_0 \iff \begin{cases} f \text{ admet un } DL_0(x_0), \text{c'est-à-dire :} \\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1). \end{cases}$

  Dans ce cas : $a_0 = f(x_0)$.

- f est dérivable en $x_0 \iff \begin{cases} f \text{ admet un } DL_1(x_0), \text{c'est-à-dire :} \\ \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0). \end{cases}$

Dans ce cas : $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$.

Preuve

- $\boxed{\Longrightarrow}$ On a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Posons $\varepsilon = f - f(x_0)$. Alors $\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$ et : $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x)$ pour tout x dans un voisinage de x_0. Donc f possède un $\mathrm{DL}_0(x_0)$.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1)$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$. En faisant $x \to x_0$, on déduit que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$. Donc f possède une limite finie en x_0, or la fonction est définie en x_0 donc (voir Chapitre (AN) 6) cette limite vaut forcément $a_0 = f(x_0)$. On a bien montré $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- $\boxed{\Longrightarrow}$ On a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$. Posons pour tout x dans un voisinage de x_0 :
$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & 0 \text{ si } x \neq x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Alors puisque f est dérivable en x_0, on vérifie sans difficulté que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to x_0} 0$ et :
$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)$$
En effet, si $x = x_0$ l'égalité est $f(x_0) = f(x_0)$, et si $x \neq x_0$, on a :
$$f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \varepsilon(x)(x-x_0)$$
$$= f(x_0) + \cancel{(x-x_0)f'(x_0)} + \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\cancel{x-x_0}} - \cancel{f'(x_0)}\right)(x-x_0) = f(x)$$
pour tout x dans un voisinage de x_0. Donc f possède bien un $\mathrm{DL}_1(x_0)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. On a déjà vu que nécessairement $a_0 = f(x_0)$. Alors le développement limité donne :
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1 + \underset{x\to x_0}{o}(1) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1.$$
Donc f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = a_1$.

Attention

Cet énoncé ne se généralise **pas** pour des valeurs supérieures de n.

Exemple 33 (Contre-exemple) L'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{admet un } \mathrm{DL}_2(0).$$

Pourtant, f' n'est pas continue en 0, donc f n'est même pas deux fois dérivable.

La proposition précédente permet d'étudier l'existence d'une tangente, mais en poussant le développement limité un peu plus loin on peut même obtenir la position relative.

Proposition 15 | Position relative de la tangente

Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_p(x_0)$, $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$:
$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0)}_{\substack{\text{Donne l'équation de} \\ \text{la tangente en } x_0}} + \underbrace{a_p(x-x_0)^p}_{\substack{\text{Donne la position par} \\ \text{rapport à la tangente}}} + \underset{x\to 0}{o}\left((x-x_0)^p\right).$$

Note : *a_p désigne donc le premier coefficient non nul du développement limité après l'ordre 2*

Alors, f est continue et dérivable en x_0 (on a $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$) et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T_{x_0} en son point d'abscisse x_0 d'équation $y = a_0 + a_1(x-x_0)$. De plus,

- Si p est pair : $f(x) - [a_0 + a_1(x-x_0)]$ a le signe de a_p au voisinage de x_0, donc $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T_{x_0} si $a_p > 0$, et en-dessous si $a_p < 0$.
- Si p est impair : $f(x) - [a_0 + a_1(x-x_0)]$ change de signe au voisinage de x_0, donc $\mathscr{C}_f$ traverse T_{x_0} et on dit que $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion* de $\mathscr{C}_f$.

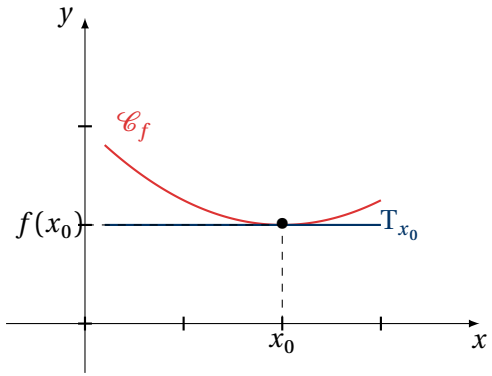
Ainsi, si la fonction admet un développement limité à un ordre $n \geqslant 2$, l'étude du signe du terme suivant permet de déterminer la position relative de la tangente par rapport à la courbe.

Preuve

Remarque 17 **(Extremums locaux)** Si $a_1 = 0$ dans l'écriture de la Proposition 15, la tangente est horizontale. Ainsi, dans le cas où p **est pair**, on obtient :

- si $a_p > 0$, f possède un minimum local en x_0,
- si $a_p < 0$, f possède un maximum local en x_0.

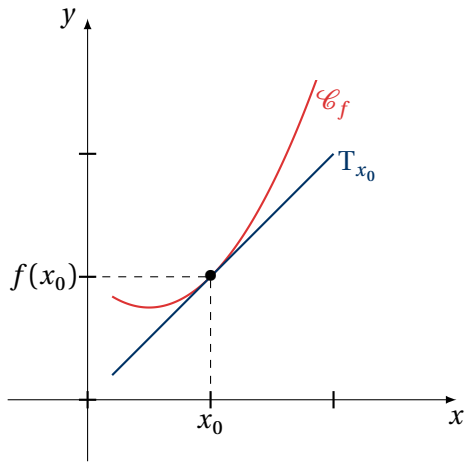
On représente ci-dessous le cas où p est pair avec $a_p > 0$.



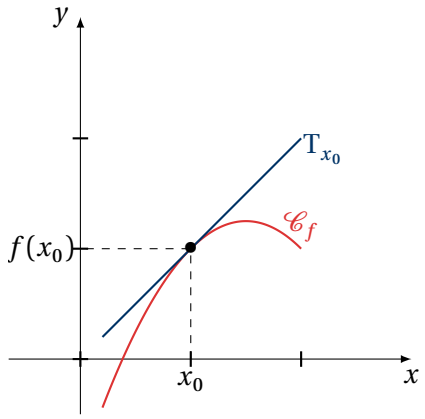
Exemple 34 Justifier l'existence d'une tangente en x_0 dans les cas suivants, préciser la position relative lorsque cela est possible.

1. $x_0 = 0$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

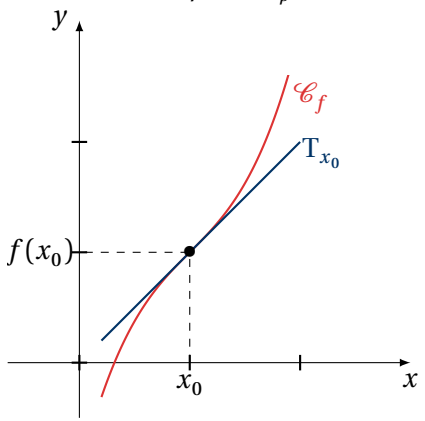
2. $x_0 = 0$, $f(x) = x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.



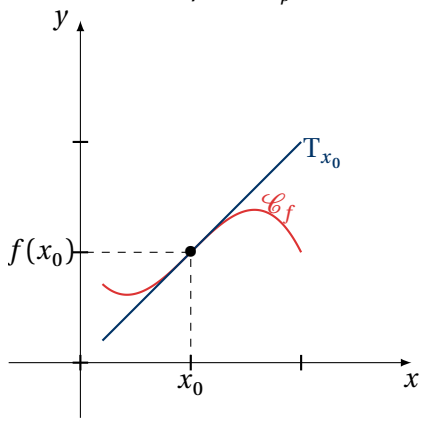
Cas p pair, $a_p > 0$



Cas p pair, $a_p < 0$



Cas p impair, $a_p > 0$ (point d'inflexion)



Cas p impair, $a_p < 0$ (point d'inflexion)

Allure locale d'une courbe en un point : interprétation graphique du développement limité de la Proposition 15

3. $x_0 = 1$, $f(x) = (x-1)^3 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)$.

Exemple 35 Soit $f : x \longmapsto \tan(x) - \cos(x)$. Donner l'équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 et étudier leurs positions relatives.

Exemple 36 Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$.

- Déterminer le $DL_3(0)$ de f.
- En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 ainsi que la position de celle-ci par rapport à la courbe.

Les propositions précédentes sont utiles, mais exigent que la fonction soit définie au point où l'on effectue le développement limité, mais les développements limités peuvent aussi servir à prolonger des fonctions comme nous allons le voir.

Proposition 16 | Développement limité et prolongement

Soit $x_0 \in I$, et $f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ (f est donc non **définie en** x_0). Alors :

- si f admet un $DL_1(x_0)$, c'est-à-dire :
$$f(x) = a + b(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0), \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},$$
alors la fonction f se prolonge par continuité en x_0, en posant $f(x_0) = a$.
- De plus, la fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = b$.

Si on souhaite savoir si la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$, il faut ensuite réaliser par exemple un développement limité de f'.

Preuve

Les développements limités à l'ordre 0 ou 1 permettent de prolonger par continuité des fonctions en un point et d'établir la dérivabilité en ce point de la fonction ainsi prolongée.

Méthode (AN) 8.5 (Prolongement à l'aide d'un développement limité) Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 mais *non définie en* x_0.

- Si f admet un $DL_0(x_0) : f(x) = a_0 + \underset{x\to 0}{o}(1)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$ et on peut donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.
- Si f admet un $DL_1(x_0) : f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to 0}{o}(x-x_0)$, alors on peut

donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$ et la nouvelle fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0 puisqu'elle admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, on a alors $f'(x_0) = a_1$.

Exemple 37 Soit $f : x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

1. Montrer que f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.

2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

BILAN DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Voici un bilan des développements limités à connaitre. On indique en en-tête de tableau la méthode pour les obtenir. *Les développements limités indiqués entre parenthèse sont ceux pour lesquels la mémorisation est facultative. Ils se déduisent rapidement des autres par composition.*

Obtenus par formule de Taylor

Formule	Type de développement limité
$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$	$\mathrm{DL}_n(0)$
$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)$ $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)$	$\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$
$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$ $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$	$\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$
$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{0\leqslant q<k} (\alpha - q) \right) \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $\left(\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right)$ $\left(\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right)$	$\mathrm{DL}_n(0)$ $\left(\mathrm{Cas}\ \alpha = \frac{1}{2}\right)$

Développement limité géométrique & Conséquences

Formule	Type de développement limité
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $\left(\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right.$ $\left. = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right)$	$\left(x \leftarrow -x\right)$, $\mathrm{DL}_n(0)$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $\left(\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right.$ $\left. = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right)$	$\left(x \leftarrow -x\right)$, $\mathrm{DL}_n(0)$
$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$ $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$	$\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$

Inclassable

Formule	Type de développement limité
$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^5\right)$	$\mathrm{DL}_5(0)$

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 8.1 (Faire apparaître une expression dont on connaît le DL)

- *Pour $a \neq 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\dfrac{1}{a+x}$ *?* On connaît celui de $\dfrac{1}{1+x}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise le dénominateur par a :
$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\ln(a+x)$ *?* On connaît celui de $\ln(1+x)$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par a dans le logarithme puis on applique la formule : « $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ » :
$$\ln(a+x) = \ln\left(a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{x}{a}\right).$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\sqrt{a+x}$ *?* On connaît celui de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par a dans la racine carrée :
$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x}{a}}.$$
- *Pour $a \neq 0$, comment obtenir un* DL(0) *de* e^{a+x} *?* On connaît celui de e^x. On applique la formule « $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$ » :
$$\mathrm{e}^{a+x} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^x.$$

Méthode (AN) 8.2 (Développement limité d'une composée) Pour obtenir un développement limité de $g = f \circ u$ au voisinage de zéro, on :

1. cherche généralement un développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre n, sous la forme : $f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$, $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. On justifie que $u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ *(Attention à ne pas négliger cette étape ! comme pour les équivalents)*
3. Par composition des limites, on a alors : $g(x) = f(u(x)) = \mathrm{P}_n(u(x)) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(u(x)^n)$, puis en exploitant le développement limité de g on simplifie l'expression précédente jusqu'à obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g = f \circ u$.

Méthode (AN) 8.3 (Développement limité d'un quotient) Le point le plus important à retenir est le suivant : *pour obtenir le développement limité d'un quotient, il faut utiliser la composition avec le développement limité en 0 de* $x \longmapsto \dfrac{1}{1\pm x}$. Plus précisément :

- pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$ il faut *via* des factorisations obtenir une écriture de la forme $\dfrac{1}{1\pm f(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Il reste alors à composer le développement limité en 0 de f avec celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1\pm x}$.
- Pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{h(x)}{g(x)}$, on écrit $\dfrac{h(x)}{g(x)} = h(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ et on fait le produit du DL en 0 de h avec celui de $\dfrac{1}{g}$.

Méthode (AN) 8.4 (Se ramener à zéro à partir de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

- Si $x_0 \neq 0$ et $x_0 \notin \{\pm\infty\}$, alors la recherche d'un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ pour une fonction f se fera en se ramenant au voisinage de 0 par le changement de variable « $h = x - x_0$ ». Plus précisément,
  1. considérer $g : h \longmapsto f(x_0 + h)$,
  2. faire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g : on obtient une expression du type
  $$g(h) = \mathrm{R}_n(h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$
  avec R_n fonction polynomiale de degré n définie au voisinage de zéro.
  3. Un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f est alors : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{R}_n(x - x_0) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.
- Si $x_0 = \pm\infty$, alors on fait comme précédemment mais pour la fonction g : $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$

Méthode (AN) 8.5 (Prolongement à l'aide d'un développement limité) Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 mais *non définie en* x_0.

- Si f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$: $f(x) = a_0 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(1)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$ et on peut donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x - x_0)$, alors on peut donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$ et la nouvelle fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0 puisqu'elle admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, on a alors $f'(x_0) = a_1$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Donner la formule de TAYLOR-YOUNG	*si f est $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0, alors* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$ *si f est $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0, alors* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$	*Ne pas oublier l'hypothèse de classe $\mathscr{C}^n$*
Définition de la négligeabilité d'une fonction par rapport à une autre au voisinage de ∞	*Soient deux fonctions f, g définies au voisinage de a, et telle que g ne s'annule pas au voisine de $+\infty$,* $f(x) = \underset{x\to\infty}{o}(g(x))$ *signifie* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *Soient deux fonctions f, g définies au voisinage de a, et telle que g ne s'annule pas au voisine de $+\infty$,* $f(x) = \underset{x\to\infty}{o}(g(x))$ *signifie* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	
Développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction sinus	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \underset{x\to 0}{o}(x^5)$	*Vérifier à l'aide de la parité*
Développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction cosinus	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \underset{x\to 0}{o}(x^5)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \underset{x\to 0}{o}(x^5)$	*Vérifier à l'aide de la parité*
Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$	$\frac{x}{1+x} =$ $x\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) =$ $x - x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ $\frac{x}{1+x} =$ $x\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) =$ $x - x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$	*Vérifier à l'aide de la parité*
Développement limité à l'ordre 4 de $x \longmapsto \ln(1+x)$ lorsque x est au voisinage de 0	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$	

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie*	*Savoir expliquer géométriquement ce que cela signifie*

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les développements limités :
   - connaître la définition d'un développement limité ..... ☐
   - savoir obtenir des développements limités (somme, produit, composée, troncature, quotient, intégration) ..... ☐
   - connaître les développements limités usuels ..... ☐
2. Savoir utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour déterminer des développements limités ..... ☐
3. Savoir utiliser les développements limités :
   - pour déterminer des limites et des équivalents ..... ☐
   - pour prolonger des fonctions ..... ☐
   - pour déterminer des positions relatives ..... ☐

Exercice 1 | **Opération nettoyage** « Nettoyer » le plus possible les expressions suivantes.

1. $\ldots \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$,
2. $\ldots \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + x\ln x + o\left(x^2\ln x\right) + x^2 + o\left(x^2\right)$,
3. $\ldots \underset{n\to\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$.

5.1. Calculs de développements limités

Exercice 2 | Calculer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1-x} - e^x$
2. $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$
3. $DL_3(0)$ de $\arctan(x^3)$
4. $DL_3(0)$ de $\cos\left(\sqrt{x}\right)$
5. $DL_2(0)$ de $2^x - 1$
6. $DL_4(0)$ de $\sin(2x)$
7. $DL_3(0)$ de $\frac{\cos(x)-1}{x}$
8. $DL_3(0)$ de $e^x\sin(x)$
9. $DL_4(0)$ de $\cos(x)\ln(1+x)$
10. $DL_3(0)$ de $\left(x^3+1\right)\sqrt{1-x}$
11. $DL_4(0)$ de $(\ln(1+x))^2$
12. $DL_6(0)$ de $\sin x\cos(2x)$.

Solution (exercice 2)

1. $$\frac{1}{1-x} - e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)$$
$$= \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$$

2. $$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$
$$+ 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$
$$= \boxed{2 - \frac{1}{4}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$$

3. Connaissant : $\arctan(x) = x + o(0)\,x$, on a : $\boxed{\arctan(x^3) = x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$

4. Puisque :
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right),$$
on obtient :
$$\boxed{\cos\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{720} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$$

5. $$2^x - 1 = e^{x\ln(2)} - 1$$
$$= 1 + x\ln(2) + \frac{x^2\ln^2(2)}{2} - 1 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$= \boxed{x\ln(2) + \frac{x^2\ln^2(2)}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).}$$

6. $$\sin(2x) = (2x) - \frac{(2x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$$
$$= \boxed{2x - \frac{4x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).}$$

7. $$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_{x\to 0}\left(x^4\right) - 1}{x}$$
$$= \boxed{-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$$

8. $e^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$

$= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

$= \boxed{x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$

9. $\cos(x)\ln(1+x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

$= \boxed{x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}$

10. $(x^3+1)\sqrt{1-x} = (x^3+1)\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$

$= x^3 + 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

$= \boxed{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$

11. $(\ln(1+x))^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$

$= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$

$= \boxed{x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$

12. $\sin(x)\cos(2x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)\right)\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)\right)$

$= x - 2x^3 + \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^5 + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$

$= \boxed{x - \frac{13}{6}x^3 + \frac{121}{120}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6).}$

Exercice 3 | Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\frac{1}{3+x}$

2. $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

3. $DL_4(0)$ de $\exp(\cos x)$

4. $DL_2(0)$ de $\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^5$

5. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}}{\cos^3 x}$.

Solution (exercice 3)

1. On factorise et on utilise le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0.

$\frac{1}{3+x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}$

$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$

$= \boxed{\frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} - \frac{x^3}{81} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$

2. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^4)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$.

On pose $u(x) = -\frac{x^2}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, on a bien $u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ lorsque $x \to 0$ et : $u(x)^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$. On obtient :

$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$= \boxed{-\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$

3. $e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_{x\to 0}(x^4)} = e^1 e^{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o_{x\to 0}(x^4)}$.

On pose $u(x) = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, on a bien $u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ lorsque $x \to 0$ et : $u(x)^2 = \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, avec $\underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^4)$. On obtient :

$e^{\cos x} = e\left(1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$

$= e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$

$= \boxed{e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4).}$

4. $\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^5 = \left(\frac{1+1+x+\frac{x^2}{2!} + o_{x\to 0}(x^2)}{2}\right)^5$

$= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^5$.

On pose $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on a bien $u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ lorsque $x \to 0$ et :

$u(x)^2 = \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ avec $\underset{x\to 0}{o}(u(x)^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. Or,

$$(1+u(x))^\alpha = 1 + \alpha u(x) + \alpha(\alpha-1)\frac{u(x)^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2),$$

d'où avec $\alpha = 5$, $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$, donc :

$$\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^5 = 1 + 5u(x) + 10u(x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$= 1 + 5\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + 10\frac{x^2}{4}$$
$$= \boxed{1 + \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

5. $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

De plus : $\frac{1}{\cos^3(x)} = \cos^{-3}(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^{-3}$. On pose alors $u(x) = -\frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on a $\underset{x\to 0}{o}(u(x)) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $(1+u(x))^{-3} = 1 - 3u(x) + \underset{x\to 0}{o}(u(x))$, d'où $\cos^{-3}(x) = 1 + 3\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$. On obtient :

$$\frac{\sqrt{1+x}}{\cos^3 x} = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 + 3\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + 3\frac{x^2}{2}$$
$$= \boxed{1 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

5.2. Calculs de limites

Exercice 4 | Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$, **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$, **3.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$, **5.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

Solution (exercice 4) On notera en préambule que des équivalents usuels nous seraient d'aucun secours puisque les expressions font apparaitre des différences notamment (pour rappel : on ne peut soustraire une fonction à un équivalent usuel !).

1. $\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^3) - x}{x^3}$

$$= -\frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow{x\to 0} \boxed{-\frac{1}{6}}.$$

2. $\frac{1 + \ln(1+x) - \exp x}{1 - \cos x} = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)\right)}$

$$= \frac{-x^2 + o_{x\to 0}(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)}$$
$$= \frac{-1 + o_{x\to 0}(1)}{\frac{1}{2} + o_{x\to 0}(1)} \xrightarrow{x\to 0} \boxed{-2}.$$

3. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x)\right).$$

DL obtenu dans un exercice précédent

Puisque : $-\frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x) \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{6}$, on obtient par composition de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}}.$$

4. $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$

$$= \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\right)}{x\left(x + o_{x\to 0}(x)\right)}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)}{x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + o_{x\to 0}(1)}{1 + o_{x\to 0}(1)} \xrightarrow{x\to 0} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

5. Soit $x > 0$, on a : $\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$, avec :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^{x\ln(a)} + e^{x\ln(b)}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1 + x\ln(a) + o_{x\to 0}(x) + 1 + x\ln(b) + o_{x\to 0}(x)}{2}\right) \quad \text{(Substitutions)}$$

$$= \frac{1}{x}\ln\left(1 + x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} + o_{x\to 0}(x)\right) \quad \ln(1+u(x)) = u(x) + o(u(x)) \text{ où } u(x) = x\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} + o_{x\to 0}(x) \text{ avec } u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 \text{ et } o(u(x)) = o(x)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x\frac{\ln(ab)}{2} + o_{x\to 0}(x)\right)$$

$$= \ln(\sqrt{ab}) + o_{x\to 0}(1) \xrightarrow{x\to 0} \ln(\sqrt{ab}).$$

Par composition de limites,

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x} \xrightarrow{x\to 0} e^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}.$$

Exercice 5 |

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2}$$

admette une limite finie en 0^+. Déterminer cette limite le cas échéant.

Solution (exercice 5)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Effectuons un développement limité en 0 à l'ordre 2 des exponentielles :

$$\frac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 + (ax) + \frac{(ax)^2}{2} + o_{x\to 0}\left(x^2\right) - 2}{x^2}$$

$$= \frac{(a+1)x + \frac{a^2+1}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)}{x^2}$$

$$= \frac{a+1}{x} + a^2 + 1 + o_{x\to 0}(1).$$

Si $a + 1 \neq 0$, c'est-à-dire si $a \neq -1$, alors $\dfrac{a+1}{x} \xrightarrow{x\to 0^+} \pm\infty$ (suivant le signe de $a+1$). Par somme, $x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2}$ admet une limite infinie.

Si $a = -1$, le développement s'écrit alors

$$\frac{e^x + e^{ax} - 2}{x^2} = 2 + o_{x\to 0}(1) \xrightarrow{x\to 0} 2$$

et dans ce cas, la limite vaut 2.

5.3. Allures locales de courbes

Exercice 6 |

Calculer les développements limités suivants, et en déduire la limite de la fonction au point considéré x_0, la dérivabilité de la fonction prolongée en x_0, l'équation de sa tangente en x_0 ainsi que la position relative de la courbe par rapport à cette tangente :

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{1+x}$.

Solution (exercice 6)

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$:

- On fait le DL à l'ordre 3 du numérateur afin qu'après avoir divisé par x on tombe sur un DL d'ordre 2.

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{x^3}{16} - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^3}{16}\right) + o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^3}{8} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)\right).$$

On obtient que : $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{8} + o_{x\to 0}\left(x^2\right).}$

- On peut en déduire que :
  - ◇ f admet un DL à l'ordre 0, donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.
  - ◇ f admet un DL à l'ordre 1, donc la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
  - ◇ L'équation de la tangente en 0 est donnée par les termes d'ordre inférieur à 1 : $y = 1$.
  - ◇ La courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de la tangente en 0 au voisinage de 0 car $\dfrac{x^2}{8} \geqslant 0$.

2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{1+x}$:

- On fait la somme et le produit des DL usuels :

$$g(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)$$

On obtient que : $\boxed{g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).}$

- On peut en déduire que :
  - ◇ La fonction g est continue en 0 car 0 est dans le domaine de définition de g et g possède un DL à l'ordre 0,
  - ◇ g admet un DL à l'ordre 1, donc la fonction g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.
  - ◇ L'équation de la tangente en 0 est : $y = 0$.
  - ◇ En étudiant le signe de $\dfrac{x^3}{6}$, on obtient que la courbe $\mathscr{C}_g$ est en-dessous de la tangente localement au voisinage de 0^- et au-dessus de la tangente localement au voisinage de 0^+.

Exercice 7 |

Pour les fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente (aller jusqu'à l'ordre 2 suffit dans cet exercice).

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{3+\sin(x)}$ en $a = 0$,

2. $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ en $a = 1$.

Solution (exercice 7)

1. Calculons un $\mathrm{DL}_2(0)$ de f. Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{3+\sin(x)} = \frac{1}{3 + x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}.$$

On pose $u(x) = \dfrac{x}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ (on a bien $u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$). On a : $u(x)^2 = \dfrac{x^2}{9} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ donc $\underset{x\to 0}{o}\left(u(x)^2\right) = \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. D'où :

$$\frac{1}{3+\sin(x)} = \frac{1}{3} \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(u(x)^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

On en déduit que la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 0 a pour équation : $\boxed{y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{9}}$.

De plus, comme $\dfrac{x^2}{27} > 0$ au voisinage de 0, on peut affirmer que la courbe représentant f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

2. Calculons un $\mathrm{DL}_2(1)$ de f : pour cela on pose $x = 1 + h$ (et donc $h = x - 1$).

$$f(1+h) = \ln(1+1+h)$$
$$= \ln(2+h)$$
$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)$$
$$= \ln(2) + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$$

D'où : $\boxed{f(x) = \ln(2) + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{8} + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right).}$

On en déduit que la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 1 a pour équation $\boxed{y = \ln(2) + \dfrac{x-1}{2}}$.

De plus, comme $-\dfrac{(x-1)^2}{8} < 0$, la courbe représentant f est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 8 |

1. Donner une expression de $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ (lorsque $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ existent).

2. Calculer le $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $f(x)=\ln(\tan x)$. *On pourra utiliser le développement limité démontré en cours :* $\tan(h)=h+\frac{1}{3}h^3+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)$.

3. Préciser l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

Solution (exercice 8)

1. Si a et b deux deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ existent,

$$\begin{aligned}\tan(a+b)&=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\&=\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\&=\frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}\\&=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

Division par $\cos(a)\cos(b)$ au numérateur et au dénominateur

2. Posons $x=\frac{\pi}{4}+h$. On a, en utilisant la relation précédente :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)&=\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\&=\ln\left(\frac{1+\tan(h)}{1-\tan(h)}\right)\\&=\ln(1+\tan(h))-\ln(1-\tan(h)).\end{aligned}$$

D'après la question précédente, puisque $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Procédons au DL de $\ln(1+\tan(h))$ et de $\ln(1-\tan(h))$ à l'ordre 3 en 0.

- $\ln(1+\tan(h))=\ln(1+u(h))$ avec $u(h)=h+\frac{h^3}{3}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\xrightarrow{h\to 0}0$.
  Sachant que : $u(h)^2=h^2+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)$, $u(h)^3=h^3+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)$, on obtient :
  $$\begin{aligned}\ln(1+\tan(h))&=u(h)-\frac{u(h)^2}{2}+\frac{u(h)^3}{3}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\\&=h+\frac{h^3}{3}-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\\&=h-\frac{h^2}{2}+\frac{2}{3}h^3+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right).\end{aligned}$$
- De même,
  $$\begin{aligned}\ln(1-\tan(h))&=-h-\frac{h^3}{3}-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)\\&=-h-\frac{h^2}{2}-\frac{2}{3}h^3+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right).\end{aligned}$$

Au final : $f(x)=2h+\frac{4}{3}h^3+\underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)$, puis on remplace h par $x-\frac{\pi}{4}$:

$$\boxed{f(x)=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}.$$

3. La $\boxed{\text{droite d'équation } y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente à gauche de $\frac{\pi}{4}$ et au-dessus de sa tangente à droite de $\frac{\pi}{4}$ (signe de $\frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$ pour x proche de $\frac{\pi}{4}^-$ puis pour x proche de $\frac{\pi}{4}^+$).

5.4. Développement limité d'une fonction réciproque

Exercice 9 | Soit la fonction f définie par :
$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\arctan x+e^x-1$.

1. Étudier f et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que f induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
3. Soit g la réciproque de la bijection précédente. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. En déduire que g admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donner un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Solution (exercice 9)

1.
- La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.
- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. En particulier elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+e^x$. Ainsi $f'(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ comme somme de deux termes strictement positifs.
- Limites aux bornes :
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{\pi}{2}-1$ par propriétés sur les sommes de limites. Et ainsi $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=-\frac{\pi}{2}-1$ au voisinage de $-\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ par propriétés sur les sommes de limites.
- Variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f		$+\infty$
	$-\frac{\pi}{2}-1$	

2. D'après la question précédente, on a :
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.
- La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}-1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}-1, +\infty\right[.}$$

3.
- On a :
  - ◇ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
  - ◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

  Ainsi d'après le théorème sur la régularité des fonctions réciproques, on sait que $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}-1, +\infty\right[.}$
- Comme la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}-1, +\infty\right[$, on sait d'après le théorème de TAYLOR-YOUNG que : $\boxed{g \text{ admet des développements limités à tout ordre}}$ en tout point de $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2}-1, +\infty\right[$.

4.
- Comme g admet un développement limité à tout ordre au voisinage de tout point de I et que $0 \in \mathrm{I}$, g admet en particulier un développement limité à l'ordre 2 en 0. Ainsi il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$g(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + o(u^2).$$
- On veut savoir si on peut poser $u = f(x)$. Comme $f(0) = 0$, on a bien que $f(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi on va pouvoir poser $u = f(x)$. Il reste donc à trouver le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f. On a
$$f(x) = x + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2) - 1 = 2x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$
- Par composition de développement limité du même ordre, on a, en posant $u = f(x)$:
$$g(f(x)) = a_0 + a_1\left(2x + \frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(2x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2)$$
$$g(f(x)) = a_0 + 2a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2).$$
Or on connait un deuxième développement limité de $f \circ g$: en effet, $g(f(x)) = x = x + \underset{x\to0}{o}(x^2)$.
- Puis par unicité du développement limité, on obtient que
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 2a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + 4a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{16}. \end{cases}$$
Ainsi on obtient que : $\boxed{g(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \underset{x\to0}{o}(x^2)}$.

Exercice 10

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto e^x + x - 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f^{-1}.

Solution (exercice 10)

1.
- La fonction f est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- En particulier la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = e^x + 1$. Ainsi $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme somme de deux termes strictement positifs.
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les sommes de limites.
- Variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

- On obtient donc :
  - ◇ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues.
  - ◇ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  - ◇ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note f^{-1} la fonction réciproque.

2. • On a :
  - ◇ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
  - ◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) \neq 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs.

  Ainsi d'après le théorème sur la régularité des fonctions réciproques, on sait que la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Comme la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on sait d'après le théorème de TAYLOR-YOUNG que f^{-1} admet en tout point de $\mathbb{R}$, des développements limités à tout ordre. En particulier f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 en 0. Ainsi il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $f^{-1}(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \underset{u\to0}{o}(u^3)$.
- On veut savoir si on peut poser $u = f(x)$. Comme $f(0) = 0$, on a bien que $f(x)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi on va pouvoir poser $u = f(x)$. Il reste donc à trouver le $DL_3(0)$ de f. On a

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3) + x - 1 = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3).$$

- Par composition de développement limité du même ordre, on a, en posant $u = f(x)$:

$$f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + a_2\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 + a_3\left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)$$

$$f^{-1}(f(x)) = a_0 + 2a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + 4a_2\right)x^2 + \left(\frac{a_1}{6} + 2a_2 + 8a_3\right)x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3).$$

Or on connait un deuxième développement limité de $f^{-1} \circ f$: en effet, $f^{-1}(f(x)) = x = x + \underset{x\to0}{o}(x^2)$.

- Puis par unicité du développement limité, on obtient que

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ 2a_1 = 1 \\ \frac{a_1}{2} + 4a_2 = 0 \\ \frac{a_1}{6} + 6a_2 + 8a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{1}{16} \\ a_3 = \frac{1}{192}. \end{cases}$$

Ainsi on obtient que : $\boxed{g(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{192} + \underset{x\to0}{o}(x^3).}$

5.5. Développement limité et régularité

Exercice 11 | Soit la fonction f définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x^2 - 1}.$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

Solution (exercice 11)

1. On peut par exemple pour cela faire un $DL_0(1)$. On va même faire un $DL_1(1)$ afin de répondre en même temps à la question d'après. On pose donc pour cela $h = x - 1 \iff x = 1 + h$. On obtient après calculs que

$$F(h) = \frac{(1+h)\ln(1+h)}{h(h+2)} = \frac{1}{2h} \times (1+h)\ln(1+h)\left(1 + \frac{h}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2} + \underset{h\to0}{o}(h).$$

Ainsi on a : $f(x) = \frac{1}{2} + \underset{x\to1}{o}(x-1)$. Donc, comme on a existence d'un $DL_0(1)$, la fonction f est prolongeable par continuité en 1 en posant $\boxed{f(1) = \frac{1}{2}}$.

2. Comme on a existence d'un $DL_1(1)$, la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.
3. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$. Puis par propriété sur les

somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = 0.}$

4. Avec le taux d'accroissement, on a :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2-1} = +\infty$$
par propriétés sur les somme et quotient de limites. Ainsi la fonction f ainsi prolongée en 0 $\boxed{\text{n'est pas dérivable en 0}}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Exercice 12 | Soit a un paramètre réel. On définit la fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{e^{\sqrt{-x}}+e^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose désormais que a est égal à la valeur trouvée à la question 1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout x réel.

Solution (exercice 12)

1. • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions dérivables.
   • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composées, somme et quotient de fonctions dérivables.
   • Étude de la dérivabilité en 0 :
   ◇ On a par propriété⍰ sur la composition de limites que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
   ◇ On a par propriétéés sur la compositions, somme et quotient de limites que : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$.
   Ainsi pour que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, il faut prendre $a = 1$. Et pour $a = 1$, la fonction f est continue en 0.
   Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour } a = 1.}$
2. • Étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}^{+\star}$: la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x > 0$:
$$f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$
   • Étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}^{-\star}$: la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composées, somme et quotient de fonctions dérivables et pour tout $x < 0$:
$$f'(x) = \frac{e^{-\sqrt{-x}} - e^{\sqrt{-x}}}{4\sqrt{-x}}.$$
   • Étude de la dérivabilité en 0 :
   ◇ On a : $\cos\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Ainsi il y a existence d'une $DL_1(0)$ d'où la dérivabilité à droite en 0 de f avec $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.
   ◇ On a : $\frac{e^{\sqrt{-x}}+e^{-\sqrt{-x}}}{2} = 1 - \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$. Ainsi il y a existence d'un $DL_1(0)$ d'où la dérivabilité à gauche en 0 de f avec $f'_g(0) = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi comme $f'_g(0) = -\frac{1}{2} = f'_d(0)$, la fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bien dérivable sur } \mathbb{R}.}$

5.6. Asymptote oblique en $+\infty$

Exercice 13 | On dit qu'une fonction f définie au voisinage de $+\infty$ admet une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ si : $\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$.

1. Déterminer un développement asymptotique d'ordre 2 de la fonction :
$$f : x \longmapsto \frac{x^2}{x+1} e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$
2. En déduire que f admet en $+\infty$ une asmptote oblique dont on précisera l'équation.
3. À partir du développement asymptotique d'ordre 2 de f au voisinage de $+\infty$, montrer que la courbe représentant f est au-dessus de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Solution (exercice 13)

1. Tout d'abord :
$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = x \times \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right),$$
car $u(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$. On déduit alors :
$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
On passe maintenant au deuxième terme, qu'il faut pousser à l'ordre 3 à cause

du terme $x-1$.

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos(u(x)) = 1 - \frac{u(x)^2}{2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(u(x)^3\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{1-\frac{1}{2x^2}+o_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$
$$= e \times e^{-\frac{1}{2x^2}+o_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)}.$$

Posons $v(x) = -\frac{1}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Alors $v(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$, et

$$\underset{x\to0}{o}(v(x)) = \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad v(x)^2 = \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad \underset{x\to0}{o}\left(v(x)^2\right) = \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Il faut donc pousser le développement limité de l'exponentielle jusqu'à l'ordre 2 :

$$e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = e \times \left(1 - v(x) + \frac{v(x)^2}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(v(x)^2\right)\right)$$
$$= e \times \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$
$$= e\left(x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Après développement et troncation, on trouve :

$$\boxed{f(x) = ex - e + \frac{e}{2x} + \frac{e}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

2. D'après le développement précédent :

$$f(x) - (ex - e) = \frac{e}{2x} + \frac{e}{2x^2} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0.$$

Ainsi, $\boxed{y = ex - e \text{ est une asymptote oblique à } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage de } +\infty.}$

3. Toujours à partir du développement, on a :

$$f(x) - (ex - e) = \frac{e}{2x} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}_{:=w(x)}.$$

On a $w(x) \xrightarrow{x\to\infty} 1$, donc w est positive sur un voisinage de $+\infty$, la fonction $x \longmapsto \frac{e}{2x}$ est aussi positive sur un voisinage de $+\infty$. Donc :

$\boxed{f \text{ est au-dessus de son asymptote oblique au voisinage de } +\infty.}$

III

Troisième partie

Aléatoire & Statistiques