Chapitre # (PS) 3 — Variables aléatoires

Résumé & Plan

Un premier objet important des probabilités est l'espace probabilisé, que nous avons étudié dans un précédent chapitre. À présent nous allons nous intéresser à des fonctions d'issues d'une expérience, que nous appellerons « variables aléatoires ».

La notion d'espérance a été initialement introduite par Huygens *en 1657, dans son traité De Ratiociniis in Aleae Ludo (« de la logique du jeu de dé »). Le nom d'espérance y apparaît en latin sous le nom de expectatio, avec l'interprétation d'être « le juste prix auquel un joueur accepterait de céder sa place dans une partie ».*

— **Le saviez-vous ?**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Reprenons notre expérience introductive de lancer de dé du Chapitre (PS) 1. Nous l'avons décrite au moyen d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On peut également, à partir du résultat du lancer, associer une valeur (cela peut être un gain en euro, par exemple) c'est-à-dire associer pour tout $\omega \in \Omega$ une valeur $X(\omega)$. En d'autres termes, cela revient à définir une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

On ne sera donc pas toujours intéressé par le résultat complet d'une expérience aléatoire, *i.e.* les éléments de Ω, mais plutôt par une une fonction de ces derniers. Une telle fonction sera appelée *variable aléatoire* si la quantité d'intérêt est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou *vecteur aléatoire* si la quantité est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Cadre

Dans tout le chapitre, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ sur lequel seront définies les variables aléatoires.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définition

Définition 1 | Variable aléatoire (finie)

- On appelle *variable aléatoire réelle sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, ou simplement *variable aléatoire* si le contexte est clair, toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est appelé l'*univers-image* ou *support* de X ou encore *valeurs prises* par X.
- ◇ On dit que X est une *variable aléatoire finie* si son support est fini, c'est-à-dire si on peut écrire $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_N\}$ où $N \in \mathbb{N}$.
  - ◇ On dit que X est une variable aléatoire *discrète* si son support est dénombrable, c'est-à-dire si on peut écrire $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
  - ◇ On dit que X est une variable aléatoire *continue* si on n'est pas dans un des deux cas précédents.

Note — *Contrairement aux apparences, une variable aléatoire n'est pas une « variable », mais bien une application.*

Remarque 1

- En deuxième année, comme déjà annoncé dans le Chapitre (PS) 1,

$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ sera généralisé en $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire l'ensemble des évènements ne sera pas toujours $\mathscr{P}(\Omega)$. La Définition 1 sera très légèrement complétée.

- Les variables aléatoires finies seront étudiées en 1ère année. En 2ème année, les variables aléatoires discrètes et une partie des variables aléatoires continues (celles que l'on qualifie « à densité »). Néanmoins, les définitions et les résultats de cette partie s'appliquent à toutes les variables aléatoires, qu'elles soient finies ou non.

Proposition 1 | Si Ω est fini

- Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors : Ω fini $\Longrightarrow$ $X(\Omega)$ fini.
- En d'autres termes, toute variable aléatoire définie sur univers fini est nécessairement finie.

Preuve Puisque $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec $n = \operatorname{Card}\Omega$ (l'univers est supposé fini ici), nous avons $X(\Omega) = \{X(\omega_1), \dots, X(\omega_n)\}$. Ainsi $X(\Omega)$ est bien un ensemble fini.

Exemple 1 (Cas discret)

- On lance successivement 100 fois un dé à 6 faces. Soit S la somme des résultats obtenus. Déterminer l'univers-image de S et en déduire de quel type de variable aléatoire il s'agit. Donner la notation des événements A « la somme des résultats obtenus vaut 230 » et B « la somme des résultats obtenus est supérieure à 120 ».

- Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur :
  1. gagne le double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire.
  2. Sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.

  Décrire l'expérience en précisant un triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé ainsi qu'une variable aléatoire X décrivant le gain, c'est une variable aléatoire finie.

- On lance simultanément deux dés discernables et on choisit comme univers $\Omega = [\![1\,,\,6]\!]^2$. Notons alors :
  - X la somme des valeurs des dés
  - Y le maximum des deux valeurs.

  Déterminer l'univers-image de X, puis de Y.

  Écrire explicitement les applications X et Y mises en jeu.

Note : *Nous n'écrierons que très rarement les variables aléatoires en tant qu'applications. Le plus souvent, nous étudierons uniquement leur « loi » ce qui est suffisant pour calculer des quantités utiles (espérance, variance, écart-type etc.)*

- On pioche indéfiniment et avec remise une boule dans une urne contenant 10^4 boules rouges et 10 boules noires. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule noire. Déterminer l'univers-image de T et en déduire de quel type de variable aléatoire il s'agit. Donner la notation des événements A « on obtient la première boule noire en moins de 20 pioches » et B « on obtient la première boule noire à la 50^{eme} pioche ».

Note *C'est un temps d'attente de succès (le tirage d'une boule noire), contexte de loi géométrique qui sera étudiée en 2ème année*

- Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On pioche au hasard **simultanément** $p \leqslant N$ boules. On note X la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré et Y la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré. Définir l'univers Ω et déterminer $X(\Omega)$ ainsi que $Y(\Omega)$.

Exemple 2 **(Cas réel)**

- Soit Y la variable aléatoire mesurant la durée de vie d'un téléphone mesurée en jours. Déterminer l'univers-image de Y et en déduire de quel type de variable aléatoire il s'agit. Donner la notation de l'événement « la batterie a une durée de vie comprise entre 10,2 et 100 jours ».

- On observe deux bactéries et on s'intéresse à la durée de vie T de celle qui disparaîtra la première. On choisit comme univers $\Omega = [0,\infty[\times[0,\infty[$ et alors T peut être écrite comme : $T \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1,\omega_2) & \longmapsto & \min(\omega_1,\omega_2) \end{array}\right.$ est une variable aléatoire.

1.2. Évènements formés à partir d'une variable aléatoire

Notation **Principaux évènements associés à une variable aléatoire**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les ensembles suivants sont des événements :

- $\{X \leqslant x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant x\}$
- $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < x\}$
- $\{X \geqslant x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant x\}$
- $\{X > x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) > x\}$
- $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$
- $\{x < X < y\} = \{\omega \in \Omega \,|\, y < X(\omega) < x\}$.
- Plus généralement, pour tout $I \subset \mathbb{R}$: $\{X \in I\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in I\}$.

Exemple 3 Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Exprimer en fonction des évènements précédents les évènements :

- $\{|X| \leqslant a\}$
- $\{|X| > a\}$

Beaucoup d'évènements faisant intervenir X peuvent être écrits à l'aide des précédents, par exemple $\{X \in A\}$ pour tout ensemble A inclus dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2 | Lien $\{X \in I\}$ et $\{X = x\}$

Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall I \subset \mathbb{R}, \quad \{X \in I\} = \bigcup_{x \in I} \{X = x\} = \bigcup_{x \in I \cap X(\Omega)} \{X = x\}.$$

Preuve

$$\omega \in \bigcup_{x \in I} \{X = x\} \iff \exists x \in I, \quad X(\omega) = x \iff X(\omega) \in I \iff \omega \in \{X \in I\}.$$

Ceci établit l'égalité $\{X \in I\} = \bigcup_{x \in I} \{X = x\}$. Reste à prouver que :

$$\bigcup_{x \in I} \{X = x\} = \{X \in I\} = \bigcup_{x \in I \cap X(\Omega)} \{X = x\}.$$

Pour cela, on peut séparer la réunion en deux :

$$\bigcup_{x \in I} \{X = x\} = \left[\bigcup_{x \in I \cap X(\Omega)} \{X = x\}\right] \bigcup \left[\bigcup_{x \in I \cap \overline{X(\Omega)}} \underbrace{\{X = x\}}_{=\emptyset}\right] = \left[\bigcup_{x \in I \cap X(\Omega)} \{X = x\}\right] \bigcup \emptyset = \bigcup_{x \in I \cap X(\Omega)} \{X = x\}.$$

Remarque 2 Beaucoup d'autres évènements peuvent s'écrire à l'aide des $\{X = x\}, x \in X(\Omega)$. Par exemple :

$$\boxed{\{X \text{ est pair}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{X = 2k\}}, \quad \boxed{\{X \text{ est impair}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{X = 2k+1\}}.$$

Toutes les opérations déjà connues sur les applications (Chapitre (ALG) 6) livrent alors la proposition qui suit.

Proposition 3 | Structure d'espace vectoriel, opérations

- Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors :
  - $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire réelle,
  - XY est une variable aléatoire réelle.

  En particulier, l'ensemble des variables aléatoires réelles muni de l'addition et de la multiplication externe des applications est donc un espace vectoriel.
- **[Minimum/maximum]** Soient $X_1, \dots, X_n$ une collection de n variables aléatoires réelles sur sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, alors :
$$\min(X_1, \dots, X_n) : \omega \in \Omega \longrightarrow \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$
$$\max(X_1, \dots, X_n) : \omega \in \Omega \longrightarrow \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$
sont des variables aléatoires réelles.

1.3. Loi & fonction de répartition

On reprend dans cette section les précédentes notations, on se donne $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

Définition 2 | Loi & fonction de répartition

- On appelle *loi* de la variable aléatoire réelle X, l'application
$$\mathbb{P}_X : \text{I intervalle } \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}(X \in I).$$
- On appelle *fonction de répartition* de la variable aléatoire réelle X, la fonction
$$F_X : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}_X(]-\infty, t]).$$
- On appelle *fonction d'anti-répartition* de la variable aléatoire réelle X, la fonction
$$\overline{F}_X : t \in \mathbb{R} \longrightarrow 1 - F_X(t) = \mathbb{P}(X > t).$$

Note | *La dernière égalité provient simplement d'un passage au complémentaire. Elles sera justifiées dans la Proposition 5*

Remarque 3

- Déterminer la loi d'une variable aléatoire c'est donc trouver avec quelle probabilité elle arrive dans un certain intervalle. Ce n'est pas forcément aisé de calculer $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tout I intervalle, nous simplifierons la définition dans le cas des variables aléatoires finies un peu plus tard.
- Trouver la fonction de répartition c'est déterminer avec quelle probabilité elle est plus petite qu'une certaine valeur.

Exemple 4 On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ donnant le résultat du lancé d'un dé équilibré à 3 faces *(allez, un peu d'imagination!)* c'est-à-dire :
$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}, \quad \forall i \in [\![1, 3]\!], \quad \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{3}.$$
Calculer sa fonction de répartition et la tracer. On calcule donc $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas sont à distinguer.

- Si $x \in]-\infty, 1[$.
- Si $x \in [1, 2[$.
- Si $x \in [2, 3[$.
- Si $x \geqslant 3$.
- Dessinons la fonction obtenue.

Proposition 4 | Propriétés analytiques de la fonction de répartition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Alors

1. $0 \leqslant F_X \leqslant 1$,
2. F_X est croissante,
3. F_X est continue à droite, et possède une limite à gauche en tout point.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Notation

Lorsque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite à gauche (*resp.* droite) en un point a, on la notera $f(a-)$ (*resp.* $f(a+)$).

Preuve

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\{X \leqslant x\} \subset \Omega$, alors par propriété de monotonie de probabilité pour l'inclusion : $0 \leqslant F_X(t) \leqslant \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Soient $x \leqslant y$, alors $\{X \leqslant x\} \subset \{X \leqslant y\}$ donc en passant à la probabilité dans l'inclusion : $\mathbb{P}(X \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant y)$, ce qui montre que F_X est croissante.
3. La fonction F_X possède nécessairement une limite finie à droite et à gauche d'après le théorème de la limite monotone (pour les fonctions), puisqu'elle est croissante et à valeurs dans $[0,1]$ donc en particulier majorée. Nous admettons la continuité à droite.
4. Admis.

Le théorème précédent admet même une réciproque : si F est une fonction vérifiant les trois propriétés précédentes alors on peut trouver un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $F_X = F$. Plus précisément, si on a seulement la continuité à droite, cela suffit.

Théorème 1 | Existence d'une variable aléatoire de F.D.R. fixée

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. F est continue à droite en tout point,
3. $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,

alors :

- il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, et
- une variable aléatoire X définie sur cet espace tels que : $F_X = F$.

Nous admettons ce théorème.

Remarque 4 Il n'est pas nécessaire d'indiquer $0 \leqslant F \leqslant 1$ dans les hypothèses puisque c'est une conséquence de **1.** et **3.**.

Exemple 5

1. **[Discret]** Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Dessiner cette fonction, et montrer qu'il existe une variable aléatoire de fonction de répartition F.

Note | *La loi associée, qui sera étudiée plus tard, est une* BERNOULLI *de paramètre* $1/2$

2. **[Continu]** Soit G la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$.

Dessiner cette fonction, et montrer qu'il existe une variable aléatoire de fonction de répartition G.

Note | *La loi associée, qui pourra être étudiée en 2ème année, est une loi de* CAUCHY.

Proposition 5 | Propriétés probabilistes

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire, F_X sa fonction de répartition et $x \leqslant y$ deux réels. Alors :

1. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = \overline{F}_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant x)$.
2. $\mathbb{P}(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x)$,
3. $\mathbb{P}(X < x) = F_X(x-)$,
4. $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$.
En particulier : F_X est continue en $x \iff \mathbb{P}(X = x) = 0$.

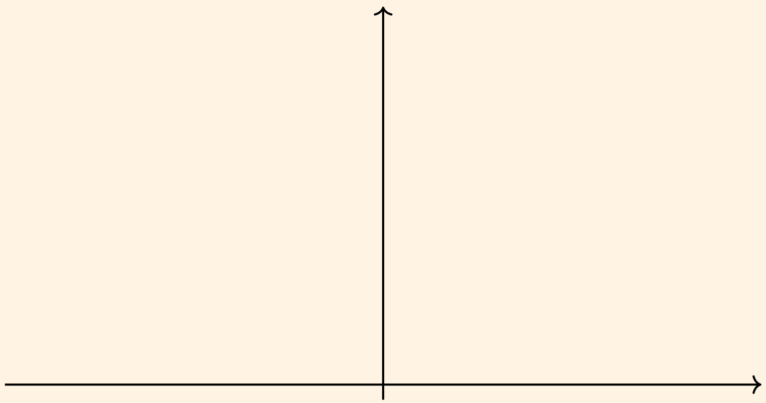
Preuve

1. On a que $\{X < x\} = \overline{\{X \geqslant x\}}$, on déduit alors le résultat en passant à la probabilité.
2. Découlent directement de la définition de F_X, en écrivant que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y$, $\{x < X \leqslant y\} = \{X \leqslant y\} \backslash \{X \leqslant x\}$, on applique ensuite $\mathbb{P}$ de chaque côté.
3. Admis.
4. On a $\{X \leqslant x\} = \{X = x\} \uplus \{X < x\}$. Donc en passant à la probabilité, on obtient l'égalité

souhaitée en utilisant l'item **3.**. Et alors :

$$\begin{aligned} F_X \text{est continue en } x &\iff F_X(x-) = F_x(x) = F_X(x+) \quad \text{\textit{car une fonction de répartition est toujours continue à droite}} \\ &\iff F_X(x-) = F_x(x) \\ &\iff \mathbb{P}(X = x) = 0. \end{aligned}$$

Résumé Allure typique d'une fonction de répartition



1.4. Indépendance

Comme pour les évènements, l'indépendance permet de transformer des probabilités d'intersection en produit de probabilités.

Définition 3 | Indépendance de variables aléatoires

Soit $X_1, \dots, X_n$ une collection de n variables aléatoires.

- **[Indépendance]** Alors :

$$X_1, \dots, X_n \text{ sont \textit{indépendantes}} \iff \forall I_1, \dots, I_n \text{ intervalles } \subset \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in I_n).$$

Note *Cette égalité s'interprète ainsi : toute famille d'événements associés à $X_1, \dots, X_n$ sont indépendants mutuellement (au sens du Chapitre (PS) 1)*

- **[Indépendance deux à deux]** Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont dites *indépendantes deux à deux* si pour tous $i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
- Plus généralement, si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de variables aléatoires, elles sont dites *indépendantes* (*resp. indépendantes deux à deux*) si toute sous-famille finie est indépendante (*resp.* deux à deux indépendantes).

Notation

On notera $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ pour signifier que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

Définition 4 | Suite i.i.d.

On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires est i.i.d. (on dit *indépendantes et identiquement distribuées*) si elles sont indépendantes **et** de même loi.

La plupart du temps, nous ne vérifierons pas l'indépendance à l'aide de la définition, mais elle sera donnée implicitement à l'aide du texte. La définition sera étudiée dans un second temps afin d'effectuer des calculs. Voici quelques exemples.

Exemple 6

- Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes dans la file d'attente d'un bureau de poste et soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de guichets ouverts. Ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes. *(Si l'on considère bien entendu que l'objectif d'un employé de la poste est de ne pas laisser attendre les gens trop longtemps : dans la réalité, le nombre de guichet ouvert dépend du nombre de personnes dans la file)*
- Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes dans la file d'attente d'un bureau de poste et soit Y la variable aléatoire comptant la somme du résultat du lancer de deux dés que l'on lance devant la poste. Ces variables aléatoires peuvent être supposées indépendantes.
- On répète exactement et plusieurs fois de suite la même expérience aléatoire. On note alors X_1 la variable aléatoire dont la valeur est le résultat de la première expérience, X_2 la variable aléatoire dont la valeur est le résultat de la deuxième expérience, etc. Ces variables sont mutuellement indépendantes et elles suivent la même loi de probabilité.

FONCTIONS DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES. Nous admettons également le résultat qui suit. Très intuitif, inutile de l'apprendre par coeur.

Théorème 2 | Lemme des coalitions (ou Indépendance par paquets)

Soit $X_1, \dots, X_n$ une collection de n variables aléatoires indépendantes.

- Alors pour toutes fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, et $n_1, \dots, n_k, k$ des entiers tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$:

$$\varphi_1(X_1, \dots, X_{n_1}), \dots, \varphi_k(X_{n_1+\dots+n_{k-1}}, \dots, X_n) \quad \text{sont indépendantes.}$$

- En particulier, pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_n$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) \subset \mathscr{D}_{f_i}$:

$$f_1(X_1), \dots, f_n(X_n) \quad \text{sont indépendantes.}$$

Exemple 7

- Si $X_1, \dots, X_3$ sont indépendantes et X_3 ne s'annule pas, alors $X_1^2, X_2^2, 1/X_3$ sont indépendantes.
- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont indépendantes alors $X_1^2 + X_2^2, X_3X_5, X_4$ sont indépendantes.

2. VARIABLES ALÉATOIRES FINIES

Cadre

À partir de maintenant, nous ne considèrerons que des variables aléatoires finies définies sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Notation $\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)$

Puisque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on peut noter $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_N\}$. Si f est une fonction telle que $X(\Omega) \subset \mathscr{D}_f$, alors on pose : $\sum_{x\in X(\Omega)} f(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)$.

Exemple 8 **(Exemples de référence)**

1. **[Expérience 1]** On lance deux dés équilibrés à 6 faces. On note S la variable aléatoire dont la valeur est la somme des deux résultats obtenus.
2. **[Expérience 2]** Une urne contient $N_1 \in \mathbb{N}^*$ boules blanches et $N_2 \in \mathbb{N}^*$ boules noires (l'urne contient donc au total $N = N_1 + N_2$ boules). On pioche simultanément $n \in [\![1, N]\!]$ boules de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
3. **[Expérience 3]** Soit une pièce dont la probabilité de faire pile vaut $p \in]0, 1[$ et dont la probabilité de faire face vaut $q = 1-p$. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois la pièce et on note Y la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de pile obtenus.

2.1. Système complet associé

Définition/Proposition 1 | Système complet associé

Si X est une variable aléatoire réelle finie, alors :

- $\{X = x\}_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements, c'est-à-dire :
$$\bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega, \quad \{X = x, X = x'\} = \emptyset, \quad \forall x \neq x' \in X(\Omega).$$
- En particulier, il est quasi-complet, c'est-à-dire :
$$\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1, \quad \{X = x, X = x'\} = \emptyset, \quad \forall x \neq x' \in X(\Omega).$$

On l'appelle le *système complet associé à* X.

Preuve Pour $(x, x') \in X(\Omega)^2$, on a clairement $\{X = x\} \cap \{X = x'\}$ dès que $x \neq x'$, par définition même d'une application (un élément de l'espace de départ ne peut avoir deux images). Reste à montrer que : $\bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\} = \Omega$.

$\boxed{\subset}$ On a $\bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\} \subset \Omega$, puisqu'une réunion de parties de Ω est encore une partie de Ω.

$\boxed{\supset}$ Inversement, soit $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega) \in X(\Omega)$ donc $\omega \in \{X = X(\omega)\} \subset \bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\}$, ce qui prouve $\Omega \subset \bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X = x\}$.

Exemple 9 Le système complet d'évènements associé à X définie dans l'Exemple 4 est : $\{X = 1, X = 2, X = 3\}$.

Exemple 10 Écrire le système complet d'évènements associé aux expériences 1, 2, 3 de l'Exemple 8.

1. **[Expérience 1]**

2. **[Expérience 2]**

3. **[Expérience 3]**

Rappelons que nous avons défini la loi de X (pour une variable aléatoire réelle générale) comme l'application qui à tout tout intervalle réel I associe $\mathbb{P}_X(I) = \mathbb{P}(X \in I)$. Comment simplifier cette définition dans le cas de variables aléatoires finies ?

$$\{X \in I\} = \{X \in I \cap X(\Omega)\}, \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap X(\Omega)).$$

Or,

$$\{X \in I \cap X(\Omega)\} = \biguplus_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in I}} \{X = x\} \implies \mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(X \in I \cap X(\Omega)) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in I}} \mathbb{P}(X = x).$$

Ainsi, pour obtenir la loi de X (c'est-à-dire toutes les probabilités $\mathbb{P}(X \in I)$), il apparaît qu'il suffit de connaitre deux choses :

- d'une part l'univers-image $X(\Omega)$,
- et d'autre part tous les $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Ce constat nous mène tout droit à la définition suivante.

Définition 5 | Loi d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire réelle finie.

- **[Loi]** On appelle *loi* de la variable aléatoire réelle finie X — par abus de langage — ou parfois *fonction de masse* la fonction encore notée $\mathbb{P}_X$ et définie par : $\mathbb{P}_X : x \in X(\Omega) \longmapsto \mathbb{P}(X = x)$.
- **[Déterminer la loi]** *Déterminer la loi* d'une variable aléatoire finie c'est calculer $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
- **[Avoir même loi que]** Soit Y une autre variable aléatoire finie définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On dit que X, Y *ont même loi* si :
$$\forall z \in X(\Omega) \cup Y(\Omega), \quad \forall z \in X(\Omega) \cup Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = z) = \mathbb{P}(Y = z).$$

Exemple 11 Déterminer la loi des variables aléatoires S, X, Y associées aux expériences 1, 2, 3 de l'Exemple 8.

1. **[Expérience 1]** *(Cette loi est une somme de deux lois uniformes, que nous étudierons en fin de chapitre)*

2. **[Expérience 2]** *(Cette loi est une loi hypergéométrique, qui n'est plus au programme de BCPST)*

3. **[Expérience 3]** Nous avons $X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!]$. On justifiera que cette loi est une loi binomiale de paramètres n et p, c'est-à-dire :
$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a établi ci-dessus également l'expression suivante, qui permet à partir de la loi de calculer la fonction de répartition.

Proposition 6 | « Loi $\implies$ F.D.R. »

Soit X une variable aléatoire réelle finie telle que $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_N\}$, $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\forall I \text{ intervalle}, \quad \mathbb{P}(X \in I) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \in I}} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{i=0 \\ x_i \in I}}^{N} \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \leqslant t) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leqslant t}} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{i=0 \\ x_i \leqslant t}}^{N} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Notation

- Lorsque X, Y ont même loi, on note $X \sim Y$.
- Si Y suit une loi usuelle $\mathscr{L}$ (une BERNOULLI, binomiale, *etc.*), on note $X \hookrightarrow \mathscr{L}$.

Exemple 12 Déterminer fonction de répartition des variables aléatoires S, X, Y évaluée en un entier $k \in \mathbb{N}$, associées aux expériences 1, 2, 3 de l'Exemple 8. *On laissera le résultat sous forme de somme si elle ne vous semble pas calculable.*

1. **[Expérience 1]**

2. **[Expérience 2]**

3. **[Expérience 3]**

Exemple 13 Un joueur pioche une boule dans une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100. Soit X la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la boule piochée. Donner $X(\Omega)$. Déterminer la loi de X et en déduire la fonction de répartition de X.

Définition 6 | Variable aléatoire constante & variable indicatrice

- Soit $a \in \mathbb{R}$. L'application
$$X : \begin{array}{|lcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & a \end{array}$$
est une variable aléatoire réelle, dite *constante*. Elle vérifie $X(\Omega) = \{a\}$.
- Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement. L'application
$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{|lcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$
est une variable aléatoire appelée *indicatrice* de A. Elle vérifie $\mathbb{1}_A(\Omega) = \{0;1\}$.

Exemple 14 On tire un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1\,,\,6]\!]$. Soit A : « le résultat est impair ». Décrivons l'indicatrice de l'ensemble A.

Résumons les points précédents dans une méthode.

Méthode Déterminer la loi d'une variable aléatoire réelle finie X

1. Commencer par déterminer son support $X(\Omega)$ s'il n'est pas déjà donné *i.e.* l'ensemble de départ de $\mathbb{P}_X$.
2. Calculer les $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Si $X(\Omega)$ est fini, il n'y a donc qu'un nombre fini de probabilités à déterminer, on peut alors les représenter sous forme d'un tableau comme ceci :

$X = k$	k_1	k_2	…
$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{P}(X = k_1)$	$\mathbb{P}(X = k_2)$	…

Pour calculer $\mathbb{P}(X = x)$ il peut être parfois utile :
- de calculer seulement $\operatorname{Card} X(\Omega) - 1$ probabilités $\mathbb{P}(X = x)$, puis de calculer la dernière en utilisant $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
- De passer par la fonction de répartition $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ ou l'anti-répartition $\mathbb{P}(X > x)$, c'est le cas en général des maximums / minimums de variables aléatoires comme dans l'Exemple 17, qui utilise la Proposition 7 ci-dessous.

LIEN ENTRE LOI & FONCTION DE RÉPARTITION. On a déjà vu que la loi permet de calculer la fonction de répartition. L'inverse est aussi possible.

Proposition 7 | « F.D.R. $\Longrightarrow$ Loi »
Soit X est une variable aléatoire finie de sorte que $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_N\}$ où $(x_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est supposée croissante. Alors :

$$\forall n \in [\![1\,,\,N]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1}) = \mathbb{P}(X \leqslant x_n) - \mathbb{P}(X \leqslant x_{n-1}).$$

Preuve

Une conséquence importante est alors la remarque qui suit.

Remarque 5 (La fonction de répartition caractérise la loi)
- Soient X, Y deux variables aléatoires finies. Alors : $X \sim Y \iff F_X = F_Y$.
- Autrement dit, deux variables aléatoires ont même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition.

LOI D'UN MAXIMUM & MINIMUM DE VARIABLES ALÉATOIRES FINIES INDÉPENDANTES. Il est facile, c'est ce que nous allons voir, de calculer la fonction de répartition ou d'anti-répartition d'un maximum / minimum de variables aléatoires. Une fois cela fait, on utilise alors la Proposition 7 afin de trouver la loi.

Méthode Trouver la loi d'un min ou max de variables aléatoires finies indépendantes
Pour le max $X = \max(X_1, \dots, X_n)$, si $X_1, \dots, X_n$ sont par exemple à valeurs dans $[\![0\,,\,N]\!], N \in \mathbb{N}$.
1. On calcule la fonction de répartition : $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k) \dots \mathbb{P}(X_n \leqslant k)$ pour tout k. On invoque l'indépendance au moment adéquat.
2. On calcule ensuite $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant k-1)$, *i.e.* $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1)$ pour tout entier k.

Pour $X = \min(X_1, \dots, X_n)$, remplacer dans **1)** $\leqslant$ par $>$, puis en déduire la fonction de répartition. Étape **2)** inchangée.

Voyons deux exemples.

Exemple 15 (Maximum de deux dés) Soient U_1, U_2 les résultats de 2 lancers de dés à 6 faces et non pipés, supposés indépendants. Déterminer la loi de U défini comme le plus grand des lancers.

Il est évident que $\boxed{U(\Omega) = [\![1\,,\,6]\!]}$. *Soit donc* $k \in U(\Omega)$, *calculons* $\mathbb{P}(U = k)$. *Pour étudier un max, on utilise la fonction de répartition.*

$$\mathbb{P}(U \leqslant k) = \mathbb{P}(U_1 \leqslant k, U_2 \leqslant k) = \mathbb{P}(U_1 \leqslant k)\mathbb{P}(U_2 \leqslant k),$$

par indépendance. Or,

$$\mathbb{P}(U_1 \leqslant k) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(U_1 = \ell) = \frac{k-1+1}{6} = \frac{k}{6}.$$

Donc finalement : $\forall k \in U(\Omega), \quad \mathbb{P}(U \leqslant k) = \dfrac{k^2}{36}$. *Puis on récupère la loi, en écrivant que*

$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \leqslant k) - \mathbb{P}(U \leqslant k-1) = \begin{cases} \dfrac{k^2}{36} - \dfrac{(k-1)^2}{36} & \textit{si } k \in [\![2\,,\,6]\!], \\ \dfrac{1}{36} - 0 & \textit{si } k = 1, \end{cases}$$

$$= \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36}. \quad \textit{(les formules se réunissent en une seule)}$$

Donc la loi de U *est la suivante, en utilisant une identité remarquable :*

$$\boxed{U(\Omega) = [\![1\,,\,6]\!], \quad \mathbb{P}(U = k) = \frac{2k-1}{36}}.$$

Exemple 16 (Minimum de deux dés) Reprendre l'exemple précédent, mais avec le minimum des deux dés.

Exemple 17 **(Maximum lors de 5 tirages simultanés)** Un joueur pioche simultanément 5 boules dans une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est le maximum des numéros des boules piochées. Donner l'univers-image de Y. Déterminer la loi de Y.

Existence d'une variable aléatoire réelle finie de loi fixée. Un certain nombre d'énoncés de probabilité commencent par la phrase suivante :

« soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ » avec $p_i \in [0,1]$, i entier et (x_i) une famille.

Ces énoncés supposent l'existence de X, mais cela ne définit pas X en tant qu'application, c'est-à-dire $X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, mais existe-t-elle vraiment ? On aimerait donc au moins savoir si une telle variable aléatoire existe sur un certain $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à trouver : la réponse est oui dès que la somme des p_i supposés positifs vaut un, comme le précise le théorème qui suit.

Théorème 3 | Variable aléatoire associé à une famille de somme un

Soit $\mathbf{X} = \{x_i \mid i \in [\![0\,,\,N]\!]\}$ avec $N \in \mathbb{N}$ une partie finie de $\mathbb{R}$, et $(p_i)_{i \in [\![0\,,\,N]\!]}$ une famille de réels tels que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$ et : $\forall i \in [\![0\,,\,N]\!],\quad p_i \geqslant 0$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ finie tels que :

- $X(\Omega) = \mathbf{X}$.
- $\forall i \in [\![0\,,\,N]\!],\quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i$.

Remarque 6 L'espace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est voué à rester caché et ne présente de toute façon aucun caractère d'unicité, et de nombreux choix d'espace probabilisé sont possibles pour la description d'une même situation (en voici un dans la preuve ci-après). Nous avons uniquement besoin de savoir qu'il existe afin de pouvoir faire ensuite des calculs sur X.

Preuve

1. On cherche un exemple, rien qu'un, d'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et de variable aléatoire qui répondent au problème posé. Posons alors :
$$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)) = (\mathbf{X}, \mathscr{P}(\mathbf{X})),$$
$$X = \mathrm{Id}_\Omega = \mathrm{Id}_\mathbf{X},$$
puis enfin pour $\mathbb{P}$ l'unique probabilité telle que : $\mathbb{P}(\{x_i\}) = p_i$ pour tout $i \in [\![0\,,\,N]\!]$ — *i.e.* celle définie dans la Section 2.5 du Chapitre (PS) 1. Alors ce choix convient, puisque
   - $X(\Omega) = \mathrm{Id}_\Omega(\Omega) = \Omega$,
   - et si $i \in [\![0\,,\,N]\!]$ alors : $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\mathrm{Id}_\Omega = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ \omega = x_i\}) = \mathbb{P}(x_i) = p_i$.

Exemple 18 Soient $n \geqslant 1$ et X une variable aléatoire réelle finie telle que : $X(\Omega) = [\![1\,,\,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \lambda k^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence de X pour un certain λ à trouver.

2.3. Propriétés des variables aléatoires finies

Dans la Proposition 3 nous avons vu qu'une combinaison linéaire de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle. Tout ceci reste vrai pour les variables aléatoires réelles discrètes et en plus toutes les variables aléatoires obtenues par ces opérations sont encore finies.

Proposition 8 | Structure d'espace vectoriel, opérations sur les V.A. finies

1. Soient X, Y deux variables aléatoires finies et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors :
   - $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire réelle finie,
   - XY est une variable aléatoire réelle finie.

   En particulier, l'ensemble des variables aléatoires réelles muni de l'addition et de la multiplication externe des applications est donc un espace vectoriel.
2. **[Minimum/maximum]** Soient $X_1, \dots, X_n$ une collection de n variables aléatoires réelles finies, alors :
$$\min(X_1, \dots, X_n) : \omega \in \Omega \longmapsto \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$
$$\max(X_1, \dots, X_n) : \omega \in \Omega \longmapsto \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$
   sont des variables aléatoires réelles finies.
3. **[Image d'une variable aléatoire finie par une application]** Si X est finie et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subset \mathscr{D}_f$, alors : $f(X) \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & f(X(\omega)) \end{array} \right.$ est une variable aléatoire réelle finie. Son univers-image est $f(X)(\Omega) = f[X(\Omega)]$ et sa loi est donnée par :
$$\forall y \in f[X(\Omega)], \quad \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x = f(y)}} \mathbb{P}(X = y).$$

Note *Il n'est pas nécessaire de retenir cette expression par coeur, mais uniquement savoir faire des calculs pratiques (voir l'exemple qui suit) pour des fonctions f simples.*

Preuve

1. Notons $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_0, \dots, y_m\}$. Alors :
$$\lambda X + \mu Y = \left\{\lambda x_k + \mu y_\ell \mid (k, \ell) \in [\![0\,,\,n]\!] \times [\![0\,,\,m]\!]\right\}$$
$$XY = \left\{x_k y_\ell \mid (k, \ell) \in [\![0\,,\,n]\!] \times [\![0\,,\,m]\!]\right\}.$$
   Donc $\lambda X + \mu Y$ et XY sont bien des variables aléatoires réelles finies.
2. Admis.
3. On note encore $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$. Alors par définition de la variable aléatoire $f(X) : \omega \in \Omega \longmapsto f(X(\omega))$: $f(X)(\Omega) = \{f(X(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} = f[X(\Omega)]$. Pour la loi, écrivons que pour tout $y \in f(X(\Omega))$,
$$\{f(X) = y\} = \{f(X) = y\} \cap \left(\biguplus_{x \in X(\Omega)} \{X = x\} \right) = \biguplus_{x \in X(\Omega)} \{f(X) = y\} \cap \{X = x\}$$
$$= \biguplus_{x \in X(\Omega)} \{f(x) = y\} \cap \{X = x\} = \biguplus_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x = f(y)}} \{X = x\}.$$
   Le résultat s'en suit en passant aux probabilités.

Exemple 19 On lance un dé équilibré, et soit X la variable aléatoire égale au résultat du lancer. Déterminer les lois de X, $|X|$ et X^2.

-
-
-

Propriétés de la fonction de répartition d'une loi finie. La plupart des propriétés ci-dessous ont déjà été vues dans la Proposition 3.

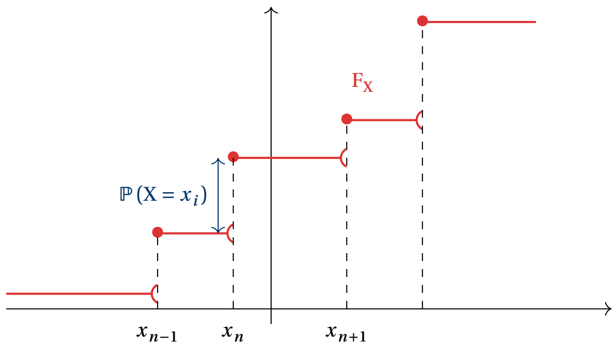
Proposition 9 | Fonction de répartition des V.A. finies

Soit X est une variable aléatoire finie.

1. $0 \leqslant F_X \leqslant 1$,
2. F_X est croissante,
3. F_X est continue à droite, et possède une limite à gauche en tout point.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
5. $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$,
6. $\mathbb{P}(x < X \leqslant y) = F_X(y) - F_X(x)$,
7. $\mathbb{P}(X < x) = F_X(x-)$,
8. $\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$.
9. La fonction F_X est constante par morceaux. *(Propriété caractéristique d'une loi finie)* Plus précisément, si on note $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_N\}$ où $(x_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ est supposée croissante, alors :

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!], \quad \forall x \in [x_n, x_{n+1}[, \quad F_X(x) = F_X(x_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = x_k).$$

Note | *Autrement dit, on a des sauts aux éléments x de $X(\Omega)$ et l'amplitude d'un saut est $\mathbb{P}(X = x)$*



La proposition précédente s'utilise en pratique en lisant les caractéristiques de la variable aléatoire à directement sur la courbe. Voyons un exemple.

Exemple 20 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2, 1[\\ \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1, 3[\\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F.

2. Soit X une variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition. Donner la loi de X.

INDÉPENDANCE DE VARIABLES ALÉATOIRES FINIES. Nous avons déjà vu la définition générale de l'indépendance de variables aléatoires, que l'on rappelle ici :

$$X_1, \ldots, X_n \text{ sont } \textit{indépendantes} \iff \forall I_1, \ldots, I_n \text{ intervalles } \subset \mathbb{R},$$
$$\mathbb{P}(X_1 \in I_1, \ldots, X_n \in I_n) = \mathbb{P}(X_1 \in I_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in I_n).$$

Dans le cas fini (ou discret), elle peut être simplifiée ainsi.

Définition 7 | Indépendance de variables aléatoires

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une collection de n variables aléatoires finies. Alors :

$$X_1, \ldots, X_n \text{ sont } \textit{indépendantes} \iff \forall (x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega),$$
$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Remarque 7 Ainsi, montrer que $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes revient à trouver $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$ de sorte que :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) \neq \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Exemple 21 **(Non indépendance)** On place au hasard deux billes dans deux boîtes A et B. On note X la variable aléatoire égale au nombre de billes dans la boite A et Y la variable aléatoire égale au nombre de boites vides. Déterminer la loi de X et Y, puis montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exemple 22 On lance deux pièces équilibrées. On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si la première pièce tombe sur Pile et 1 si elle tombe sur Face. De même, on note X la variable aléatoire qui vaut 0 si la deuxième pièce tombe sur Pile et 1 si elle tombe sur Face. X et Y sont deux variables indépendantes. On pose aussi $Z = |X - Y|$. Étudier l'indépendance deux à deux et l'indépendance mutuelle des variables X, Y et Z.

3. MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE FINIE

3.1. Espérance

On cherche ici à moyenner les valeurs que prend une variable aléatoire X, la formule

$$\frac{1}{\operatorname{Card} X(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \quad \text{pourrait convenir.}$$

Cependant, toutes les valeurs de $X(\Omega)$ ne sont pas équiprobables, afin de tenir compte de cela, on considère plutôt la définition ci-après.

Définition 8 | Espérance d'une variable aléatoire réelle finie

Soit X une variable aléatoire réelle finie telle que $X(\Omega) = \{x_0, \ldots, x_N\}$, $N \in \mathbb{N}$. On appelle *espérance de* X la quantité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=0}^{N} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Une variable aléatoire d'espérance nulle est dite *centrée*.

Exemple 23 Écrire la définition de l'espérance dans les cas suivants.

- Si $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$, alors :
- Si $X(\Omega) = \{-3, -1, 1, 2\}$, alors :

Pour calculer une espérance, il suffit donc de connaitre la loi.

Proposition 10 | Espérance d'une indicatrice

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Si X est constante égale à a, alors : $\mathbb{E}(X) = a$.
- Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Preuve

-
-

Exemple 24 Soit X une variable aléatoire décrivant le lancer d'un dé. Calculer l'espérance de X^2, en utilisant la définition de l'espérance.

Exemple 25 Considérons une variable aléatoire dont la loi est donnée ci-dessous.

k	7	2	-3	-8
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$

Calculer son espérance.

Exemple 26 Déterminer l'espérance de S définie dans l'Exemple 8.

Proposition 11 | Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires finies. Alors :

- **[Autre formule]** $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$.
- **[Linéarité de l'espérance]** Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :
$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y).$$
- **[Positivité de l'espérance]** $X \geqslant 0 \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$. *(Le résultat subsiste si on a seulement $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$ en hypothèse)*
- **[Croissance de l'espérance]** $X \leqslant Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$. *(Le résultat subsiste si on a seulement $\mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$ en hypothèse)*

Remarque 8 La formule « $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$ » permet de comprendre l'espérance, car on y voit bien que l'on moyenne les valeurs de X, pondérées par la probabilité que chaque valeur associée à une issue ω survienne. Dans la définition, la somme porte sur les valeurs de X directement, alors que dans cette dernière elle porte sur les issues dans Ω.

Preuve

1. Les événements $\{X = x\}_{x\in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements, donc :
$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{\omega\in[X=x]} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{\omega\in[X=x]} x\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{\omega\in[X=x]} \mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x) = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$
2. Pour prouver la linéarité, on établit les deux égalités ci-après :
   - $\mathbb{E}(\lambda X+\mu) = \lambda\mathbb{E}(X)+\mu$. En effet, constatons que $(\lambda X+\mu)(\Omega) = \{\lambda k+\mu \mid k \in X(\Omega)\}$, de sorte que : $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(\lambda X+\mu = \lambda k+\mu) = \mathbb{P}(X=k)$. On déduit alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X+\mu) &= \sum_{k\in X(\Omega)} (\lambda k+\mu)\mathbb{P}(\lambda X+\mu = \lambda k+\mu) = \sum_{k\in X(\Omega)} (\lambda k+\mu)\mathbb{P}(X=k)\\ &= \lambda\sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X=k) + \mu\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=k)\\ &= \lambda\times\mathbb{E}(X)+\mu\times 1 = \lambda\mathbb{E}(X)+\mu.\end{aligned}$$
   - $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$. En effet, utilisons la formule de l'espérance établie plus haut.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\})\\ &= \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega}Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

3. Si $X \geqslant 0$ alors : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant 0$, donc : $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) \geqslant 0$. On déduit alors : $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X) \geqslant 0$.

4. Pour la croissance, on constate simplement que $X \leqslant Y$ entraîne $Y - X \geqslant 0$. Donc : $\mathbb{E}(Y-X) \geqslant 0$ d'après la propriété précédente. Ainsi, par linéarité de l'espérance, on obtient : $\mathbb{E}(Y) \geqslant \mathbb{E}(X)$.

Exemple 27 Déterminer l'espérance de S, Y définies dans l'Exemple 8 en exploitant la linéarité.

1. **[Expérience 1]**

2. **[Expérience 3]**

FORMULE DE TRANSFERT POUR UNE VARIABLE ALÉATOIRE FINIE. L'objectif est ici d'obtenir une formule pour calculer des espérances de fonctions de variables aléatoires $f(X)$ sans avoir à trouver la loi de $f(X)$ (ce qui peut se révéler compliqué). Le théorème de transfert répond à ce problème.

Théorème 4 | Transfert pour les variables aléatoires finies
Soit X une variable aléatoire finie et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subset \mathscr{D}_f$. Alors :
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 9 On peut donc, avec ce théorème, calculer l'espérance de $f(X)$ en connaissant seulement la loi de X, celle de $f(X)$ n'est pas nécessaire. C'est un gain de temps considérable.

Preuve Les événements $\{X = x\}_{x\in X(\Omega)}$ forment un système complet d'événements, donc :
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})f(X(\omega)) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in\{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})f(X(\omega))$$
$$= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\omega\in\{X=x\}} \mathbb{P}(\{\omega\})f(x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)f(x)$$

Corollaire 1 | Inégalité triangulaire pour l'espérance
Soit X une variable aléatoire réelle finie. Alors : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Preuve

Exemple 28 On considère la variable aléatoire donnée par le tableau suivant :

$X = k$	-3	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

et $Y = 3X + 2$. Calculer de deux manières son espérance.

- **[Avec transfert]**

- **[Sans transfert]**

Exemple 29 Déterminer l'espérance de e^Y définie dans l'Exemple 8 en exploitant le théorème de transfert.

3.2. Moments d'ordre supérieur

La seule connaissance de l'espérance n'est pas suffisante pour estimer raisonnablement une variable aléatoire.

Par exemple, si X est une variable aléatoire prenant les valeurs -1 ou 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et si Y est une variable aléatoire prenant les valeurs -10 et 10 avec une probabilité $\frac{1}{2}$, alors, ces deux variables ont la même espérance 0.

Si on décide d'approcher ces variables par leur unique espérance, on ne commettra pas la même erreur d'approximation : une erreur de 1 pour X et une erreur de 10 pour Y. Pour différencier ces deux cas, on a besoin d'outils mesurant la dispersion, c'est-à-dire l'écart moyen entre la variable et sa moyenne (son espérance). De nombreux outils jouent ce rôle (étendue, distance inter-quartile, que nous avons déjà rencontrés en statistiques), on se contente ici d'étudier la variance.

Définition/Proposition 2 | Variance, écart-type, moments, version finie

- **[Moments d'ordre k]** On appelle *moment d'ordre k* :
$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^k \mathbb{P}(X=x).$$
- **[Moments d'ordre 2]** On appelle *moment d'ordre 2* :
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X=x).$$
- **[Variance]** On appelle *variance de* X la quantité notée $\mathbb{V}(X)$ et définie par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$, ou encore par théorème de transfert :
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X=x) \geqslant 0.$$
On appelle *écart-type de* X, la quantité notée $\sigma(X)$ et définie par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. Une variable aléatoire de variance 1 est dite *réduite*.

Remarque 10 On retiendra également que :

1. Le moment d'ordre 1 correspond donc à l'espérance.
2. La variance d'une variable aléatoire mesure l'écart « quadratique » (au carré) moyen entre X et sa valeur moyenne $\mathbb{E}(X)$, et en plus elle réalise le minimum parmi tous les écarts au carré. Plus précisément, soit X une variable aléatoir, la fonction $f : a \longmapsto \mathbb{E}\left((X-a)^2\right)$ est minimale en $a = \mathbb{E}(X)$.

Proposition 12 | Propriétés de la variance

Soient X, Y deux variables aléatoires finies, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- **[Variance nulle]** $\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$. *(On comprend bien avec cette propriété le fait que la variance mesure la dispersion autour de l'espérance)*
- **[Variance d'une expression affine]** $\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \mathbb{V}(X)$.
- **[Formule de König-Huygens]** $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

Remarque 11 Attention : il est différent de dire que « $X = \mathbb{E}(X)$ » d'une part, et « $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$ » d'autre part, on a *a priori* seulement une implication :
$$X = \mathbb{E}(X) \implies \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1.$$
Prétendre le contraire revient à confondre évènement quasi-certain (de probabilité 1) et évènement certain (l'univers Ω). Il existe des évènements de probabilité 1 qui ne sont pas égaux à l'univers en tant qu'ensembles.

Preuve

- On exploite le fait qu'une somme finie nulle de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)=0 &\iff \sum_{x\in X(\Omega)}(x-\mathbb{E}(x))^2\,\mathbb{P}(X=x)=0\\ &\iff \forall x\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}(X=x)=0 \quad \underline{\textbf{ou}} \quad x=\mathbb{E}(X)\\ &\iff \forall x\in X(\Omega)\backslash\{\mathbb{E}(X)\},\quad \mathbb{P}(X=x)=0\\ &\iff \mathbb{P}(X=\mathbb{E}(X))=1,\quad \text{car} \sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)=1.\end{aligned}$$

-

-

Opération de centrage/réduction. La proposition ci-dessous paraît anecdotique mais elle sera d'un intérêt majeur l'année prochaine.

Définition/Proposition 3 | Centrée & Centrée-réduite

Soit X une variable aléatoire finie.

- $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée, on l'appelle la *centrée de* X.
- $X^\star \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$ est centrée et réduite, on l'appelle la *centrée/réduite de* X.

Preuve

Cas de variables aléatoires indépendantes. On présente sans démonstration le résultat suivant, qu'il est impossible de démontrer en 1ère année, il est donc admis.

Proposition 13 | Espérance, Variance & Indépendance

Si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires finies mutuellement indépendantes. Alors :

- **[Espérance d'un produit]** $\mathbb{E}(X_1\times\dots\times X_n)=\mathbb{E}(X_1)\times\dots\times\mathbb{E}(X_n)$.
- **[Variance d'une somme]** $\mathbb{V}(X_1+\dots+X_n)=\mathbb{V}(X_1)+\dots+\mathbb{V}(X_n)$.

Preuve

- Admis.
- Montrons la formule pour $n=2$, c'est-à-dire que : $\mathbb{V}(X_1+X_2)=\mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2)$ lorsque X_1, X_2 sont indépendantes. Le résultat général s'en suivra par récurrence immédiate.

Attention

Les réciproques sont fausses, par exemple l'espérance d'un produit peut être égal au produit des espérances sans que les variables aléatoires ne soient indépendantes (voir l'Exemple 21 ci-dessous).

Exemple 30 Vérifier que $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ dans l'Exemple 21 alors X, Y ne sont pas indépendantes.

Exemple 31 Déterminer la variance de S, Y définies dans l'Exemple 8 en exploitant la propriété précédente.

BCPST1 © 2023-2024
Lycée Michel MONTAIGNE – Bordeaux

1. **[Expérience 1]**

2. **[Expérience 3]**

3.3. Inégalités de concentration

En probabilités, les *inégalités de concentration* sont des estimations de la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de sa moyenne, ou par complémentaire de la probabilité qu'elle se concentre autour. Il en existe beaucoup, mais il vous est demandé de connaître l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev uniquement, conséquence elle-même de l'inégalité de Markov, au programme elle aussi.

Proposition 14 | Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire finie **positive**. Alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Preuve

- **[1ère méthode : décomposition de l'espérance]**

- **[2ème méthode]** Montrons l'inégalité : $a\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant X \quad (\star)$. On note :

  $$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \geqslant a\}, \quad \Omega_1 = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) < a\}.$$

  Alors $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, il suffit donc d'établir $(\star)$ sur Ω_1 puis sur Ω_2.
  - Si $\omega \in \Omega_1$, alors l'inégalité devient $a \leqslant X(\omega)$ ce qui est correct par définition de Ω_1.
  - Si $\omega \in \Omega_2$, alors l'inégalité devient $0 \leqslant X$ ce qui est correct aussi puisque X est supposée positive.

  On a donc bien établi : $\forall \omega \in \Omega, \quad a\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}(\omega) \leqslant X(\omega)$, c'est-à-dire : $a\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}} \leqslant X$.
  En passant à l'espérance, on obtient l'inégalité de Markov :

  $$a\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}\right) \leqslant \mathbb{E}(X) \iff \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Proposition 15 | Bienaymé-Tchebychev (cas finie)

Si X est une variable aléatoire finie. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque 12 (Version complémentaire) Par passage au complémentaire, on a aussi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Preuve Soit $\varepsilon > 0$.

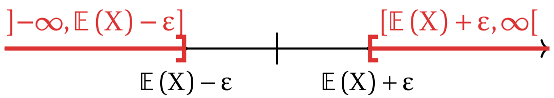
- Appliquons l'inégalité de Markov à $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$, et pour $a = \varepsilon^2$.

- On peut conclure.

Remarque 13 **(Interprétation)**
- La probabilité que X s'éloigne de $\mathbb{E}(X)$ d'au moins ε est inversement proportionnelle au carré de ε : elle est d'autant plus petite que ε est grand ou que $\mathbb{V}(X)$ est petite.
- Plus concrètement, nous avons :

$$\begin{aligned}|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon &\iff X-\mathbb{E}(X) \geqslant \varepsilon \ \underline{ou}\ X-\mathbb{E}(X) \leqslant -\varepsilon \\ &\iff X \in [\mathbb{E}(X)+\varepsilon, +\infty[\ \underline{ou}\ X \in]-\infty, \mathbb{E}(X)-\varepsilon].\end{aligned}$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev signifie donc que la probabilité que X prenne des valeurs dans l'intervalle rouge ci-dessous est inférieure à $\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$, et donc d'autant plus faible que la variance est petite. On retrouve l'interprétation de la variance en terme d'indicateur de dispersion à la moyenne.



Remarque 14 **(Remplacement « $\leqslant\ \to\ <$ » possible)** Notez que, comme $\{|X-\mathbb{E}(X)|>\varepsilon\} \subset \{|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}$ *(puisqu'une inégalité stricte est large)*, on a aussi :

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|>\varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exemple 32 On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50. On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Minorer la probabilité que la production d'une semaine soit comprise entre 40 et 60 pièces.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de pièces hebdomadaire de cette usine. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X-50| \geqslant 10) \leqslant \frac{25}{10^2} = 0,25 \implies \mathbb{P}(|X-50|>10) \leqslant \frac{25}{10^2} = 0,25.$$

Or : $40 \leqslant X \leqslant 60 \iff -10 \leqslant X-50 \leqslant 10 \iff |X-50| \leqslant 10.$

Donc : $\mathbb{P}(40 \leqslant X \leqslant 60) = \mathbb{P}(|X-50| \leqslant 10) = 1-\mathbb{P}(|X-50|>10) \geqslant 0,75.$

Remarque 15 **(Conséquence importante : la loi faible des grands nombres)** Vous verrez en seconde année une conséquence fondamentale qui est qu'une moyenne $\overline{X_n} = \dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi d'espérance μ est « proche » (en un sens à préciser) de μ. Les idées principales sont les suivantes *(On les donne sans justification, laissée en exercice)* :

- $\mathbb{V}\left(\overline{X_n}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\mathbb{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mu$,
- d'après Bienaymé-Tchebychev : $\forall \varepsilon>0,\quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n}-\mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Par théorème d'encadrement, on a ainsi montré :

$$\forall \varepsilon>0,\quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n}-\mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \text{« loi faible des grands nombres »}$$

4. LOIS USUELLES FINIES

Pour chacune des lois ci-dessous, il est important de connaître :

- sa loi — ce qui inclut $X(\Omega)$! — et une idée de son histogramme,
- son espérance/variance,
- le type d'expérience dans laquelle elle intervient,
- et comment la simuler à l'aide de Python.

Pour l'aspect informatique, nous aurons besoin des importations suivantes, que l'on suppose donc réalisées dans toute la suite.

```
import random as rd # pour les simulations
import numpy as np # pour les fonctions classiques et/ou la \
↪ simulation
import matplotlib.pyplot as plt     # pour les représentations \
↪ graphiques
```

Généralités à propos de la simulation de variables aléatoires réelles. Commençons par définir ce que l'on appelle *simulation de variable aléatoire* en Mathématiques.

Définition 9 | Simulation
Soit X une variable aléatoire. Alors on appelle *simulation de la variable aléatoire* X toute procédure permettant de renvoyer un $X(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, de sorte que si l'on effectue n simulations $X(\omega_1), \dots, X(\omega_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ selon cette même procédure, on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X(\omega_i) \leqslant x\}}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Note : $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X(\omega_i) \leqslant x\}}$ *s'interprète comme le nombre de simulations $\leqslant x$ parmi* $X(\omega_1), \dots, X(\omega_n)$

Autrement dit, si on trace l'histogramme associé à la suite de simulations, alors il est proche du véritable histogramme de la loi, ce qui est un comportement naturel attendu. Les simulations qui vont suivre sont basées sur la simulation d'un réel aléatoire *(selon une loi uniforme, qui sera étudiée en 2ème année)* entre 0 et 1.

(Simulation d'un réel entre 0 et 1)

```
>>> import random as rd
>>> rd.random()
0.5979454163194052
```

Le module `random` sait aussi simuler beaucoup de lois usuelles, mais vous devez aussi savoir les simuler « à la main ». Dans la suite nous donnerons systématiquement les deux.

COMMENT TRACER UNE FONCTION DE RÉPARTITION EN PYTHON ? Pour tracer une fonction de répartition d'une loi finie, on utilise le fait déjà établi suivant : c'est une fonction constante par morceaux, et chaque saut est aux éléments du support de X, l'amplitude d'un saut valant $\mathbb{P}(X = k)$ si $k \in X(\Omega)$. On en déduit alors la fonction générale suivante.

```
def trace_fdr(Support, Loi):
    """
    trace la fonction de réparition de loi loi donné dans la \
    ↪ liste Loi, et de support support
    """
    Fdr = [0 for _ in range(len(Support))]
    for k in range(0, len(Support)):
        Fdr[k] = somme([Loi[i] for i in range(0, k+1)])
        Expression en somme de la fonction de répartition
    plt.step(Support, Fdr) Tracé en reliant les points par palier, plutôt qu'en lignes \
↪ brisées
```

4.1. Loi uniforme sur un ensemble fini

Définition/Proposition 4 | Loi uniforme sur un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}$
Soit E un sous-ensemble **fini** de $\mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi uniforme sur* E (on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$), si :

$$X(\Omega) = E, \quad \forall k \in E, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\operatorname{Card} E}.$$

Remarque 16 (Modélisation)

- Toute expérience aléatoire dont les issues sont en nombre fini, apparaissant de manière équiprobable.
- C'est le cas dès que les issues mettent en jeu des objets indiscernables puisque dans ce cas on n'a aucune raison d'attribuer une plus grande probabilité à tel ou tel de ces objets. C'est donc une situation très fréquente : jet de dé, lancer de pièce, roulette, tirage de boules dans une urne...

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Exemple 33 (Deux exemples classiques)

1. On lance un dé non truqué et on note X le numéro obtenu.

2. On tire au hasard (de façon équiprobable) une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on note X le numéro obtenu.

Exemple 34 (Cas d'un intervalle d'entiers consécutifs) En particulier, si $E = [\![a\,,\, b]\!]$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ deux entiers tels que $a < b$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a\,,\, b]\!])$, si :

$$\forall k \in [\![a\,,\, b]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

La quantité $b - a + 1$ est simplement $\operatorname{Card}[\![a\,,\, b]\!]$.

Proposition 16 | Espérance, variance (intervalles d'entiers)

Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket a\,,\, b\rrbracket)$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}. \qquad \left(\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}\right)$$

Note | *L'espérance correspond donc au milieu de l'intervalle, logique. La formule de la variance n'est pas exigible. Elle n'est donc pas à apprendre par coeur.*

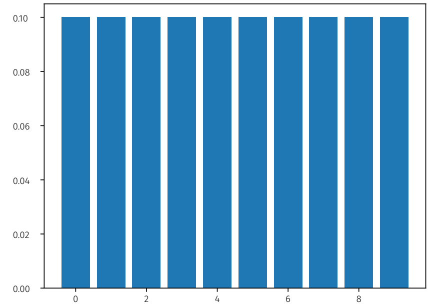
Preuve

Exemple 35 Une urne opaque contient 101 boules identiques au toucher numérotées de 0 à 100. On pioche une boule et on appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la boule piochée. Alors X suit la loi $\mathscr{U}(\llbracket 0\,,\, 100\rrbracket)$. On a donc : $\quad \forall k \in \llbracket 0\,,\, 100\rrbracket, \quad \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{101}, \quad \mathbb{E}(X) = 50, \quad \mathbb{V}(X) = 850.$

HISTOGRAMME, FONCTION DE RÉPARTITION.

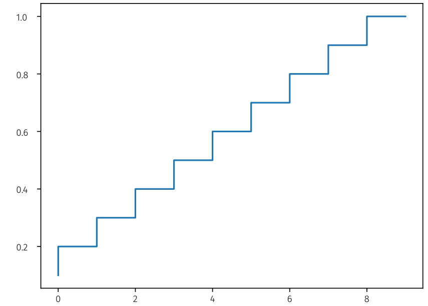
(Histogramme de la loi uniforme)

```
a = 0
b = 9
Support = range(a, b+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
for k in range(b-a+1):
    Loi[k] = 1/(b-a+1)
plt.bar(Support, Loi)
```



(Fonction de répartition de la loi uniforme)

```
trace_fdr(Support, Loi)
```



Résumé

`plt.bar` permet de tracer des diagrammes en bâtons et `plt.step` trace des fonctions en reliant les points **par morceaux**

SIMULATION. On va pouvoir se ramener à une loi uniforme sur $[0,1]$ comme nous l'avions démontré de manière générale au début de cette sous-section.

(Simulation de la loi uniforme sur $\llbracket a\,,\, b\rrbracket$) On utilise ici une fonction toute faite, il est possible de la programme à l'aide de `rd.random()`, mais cette technique nécessite des éléments du programme de 2ème année.

```
rd.randint(a, b)
```

4.2. Loi de Bernoulli, Rademacher & binomiale

Définition/Proposition 5 | Loi de Bernoulli/Rademacher de paramètre
Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire suit une :

- **[Loi de Bernoulli de paramètre p]** (on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$), si :
$$X(\Omega) = \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(X=1) = p, \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p.$$
- **[Loi de Rademacher de paramètre p]** (on note $X \hookrightarrow \mathscr{R}(p)$), si :
$$X(\Omega) = \{-1,1\}, \quad \mathbb{P}(X=1) = p, \quad \mathbb{P}(X=-1) = 1-p.$$

Remarque 17 (Modélisation) Toute expérience aléatoire dont les issues sont au nombre de deux, dont l'une apparaît avec probabilité p.

Remarque 18 (Cas particuliers sur p)

- $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathscr{U}(\{0,1\})$, $\quad \mathscr{R}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathscr{U}(\{-1,1\})$.
- Si $p=1$ (*resp.* $p=0$) alors $\mathbb{P}(X=1)=1$ (*resp.* $=0$) et $\mathbb{P}(X=0)=0$ (*resp.* $=1$) donc X est constante égale à 1 (*resp.* 0) avec probabilité 1.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions pour l'une ou l'autre des lois. En effet,

Proposition 17 | Exemples typiques, Obtenir le paramètre

- **[Indicatrice]** Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors : $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(A))$.
- **[Valeurs 0, 1]** Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0,1\}$ alors
$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{P}(X=1)) = \mathscr{B}(\mathbb{E}(X)).$$
En particulier, si X suit une certaine loi de Bernoulli, son paramètre est donné par $\mathbb{P}(X=1)$ ou $\mathbb{E}(X)$.

Cette propriété nous informe donc que toute variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}$ est finalement une Bernoulli.

Preuve

-
-

Proposition 18 | Lien entre Bernoulli et Rademacher
Soit $p \in [0,1]$, alors : $\quad X \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \iff 2X-1 \hookrightarrow \mathscr{R}(p)$.

Preuve

Définition/Proposition 6 | Loi binomiale de paramètres p et n
Soient $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une variable aléatoire suit une *loi binomiale de paramètres p et n* (on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$), si :
$$X(\Omega) = [\![0\,,\,n]\!], \quad \forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
En particulier, $\quad \mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

Preuve Il existe un espace probabilisé et une variable aléatoire vérifiant ces conditions. En effet,

Remarque 19 (Modélisation) Toute épreuve constituée de n épreuves aléatoires dont les résultats sont **indépendants**, chacune ayant deux issues appelées succès (de probabilité p) et échec (de probabilité $1-p$). La variable aléatoire X est le nombre total de succès dans ces n épreuves. Un raisonnement de dénombrement conduit à la formule mentionnée *supra*. Nous la constatons sur l'exemple qui suit.

Exemple 36 (Expression de la loi binomiale) Notons dans une expérience à deux issues 1 un succès et 0 un échec, l'univers contenant n résultats de cette expérience, répétée de manière indépendante, est alors $\Omega = \{0,1\}^n$ et X la variable aléatoire définie par :

$$X \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega_1, \ldots, \omega_n) & \longmapsto & \omega_1 + \cdots + \omega_n. \end{array} \right.$$

Elle compte alors le nombre de succès sur n expériences à deux issues. Par exemple, pour $\omega = (1,0,0,0,1,1,0,1,0)$ on a $X(\omega) = 4$ donc 4 succès.

- L'évènement $\{X = k\}$ contient les issues qui contiennent :
  k fois 1 et $(n-k)$ fois 0.
- Chacune de ces issues a une probabilité :
  $p^k(1-p)^{n-k}$.
- il y a telles issues puisqu'il s'agit de choisir les positions des k succès parmi les n tentatives.

On a donc : $\mathbb{P}(X = k) = \ldots$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

La propriété qui suit nous servira notamment pour interpréter la loi binomiale comme un comptage de succès.

Proposition 19 | Somme de bernoullis indépendantes

Soient $p \in [0,1]$, $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 1$ des variables aléatoires réelles **indépendantes** telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).$$

Preuve Montrons cela par récurrence sur n. On note :

$$\mathscr{P}_n \quad \text{« } \forall i \in [\![1, n]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p) \Longrightarrow S_n = X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) \text{ ».}$$

Initialisation. $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $\mathscr{B}(1,p) = \mathscr{B}(p)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$. On a par hypothèse $Y = X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, donc $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, 1]\!]$. Ainsi, $S_{n+1}(\Omega) = (Y + X_{n+1})(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$.

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{n+1} = k) \\
&= \mathbb{P}(Y + X_{n+1} = k) \\
&= \mathbb{P}_{X_{n+1}=0}(Y + X_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \quad \{X_{n+1} = 0, X_{n+1} = 1\} \textit{ est un système complet d'évènements} \\
&\qquad + \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(Y + X_{n+1} = k)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\
&= \mathbb{P}_{X_{n+1}=0}(Y = k)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}_{X_{n+1}=1}(Y = k-1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \quad \textit{indépendance } Y \perp\!\!\!\perp X_{n+1} \\
&= \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(Y = k-1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\
&= (1-p)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + p\binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} + \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
&= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] p^k (1-p)^{n+1-k} = \binom{n+1}{k}(1-p)^{n+1-k} \quad \text{en utilisant la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

On a donc établi que $Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+1,p)$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie et la proposition est vraie par principe de récurrence.

Exemple 37 Levons le voile sur Y définie dans l'Exemple 8. en exploitant la propriété précédente : il s'agissait d'une $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple 38 **(Stabilité par retournement)** Justifions les deux faits ci-après, tout à fait conformes à l'intuition. Soient $p \in [0,1]$ et $n \geqslant 1$.

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $1 - X \hookrightarrow \mathscr{B}(1-p)$. *(On renverse ici succès et échec.)*

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$. *(On renverse ici succès et échec, mais sur n expériences.)*

Proposition 20 | Espérance, variance

- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ avec $p \in [0,1]$, alors : $\mathbb{E}(X) = p$, $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ avec $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Preuve

-
-

Remarque 20 On peut retrouver les résultats précédents avec des calculs de sommes directs. Par exemple, pour l'espérance.

Exemple 39 Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

- Calculer $X^\star$.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X.

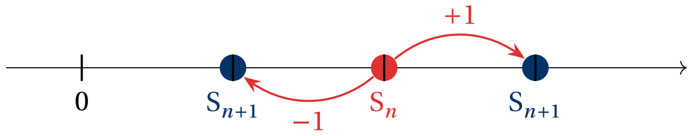
Exemple 40 **(QCM, le retour)** Un étudiant répond au hasard à toutes les questions d'un QCM composé de 12 questions indépendantes pour lesquelles on propose à chaque fois 3 réponses possibles. Le barème est le suivant : une bonne réponse apporte 1 point et une mauvaise réponse enlève 0,5 point. En moyenne, quelle note sur 12 peut espérer cet étudiant ?

Si X est la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses d'un étudiant qui répond au hasard alors X est finie, $X(\Omega) = [\![0, 12]\!]$ et X suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \frac{1}{3}$. On sait qu'en moyenne, l'étudiant obtient $\mathbb{E}(X) = 12 \times \frac{1}{3} = 4$ bonnes réponses. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre final de points de l'étudiant. On a : $Y = 1 \times X - 0,5 \times (12 - X) = 1,5X - 6$. Donc, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(Y) = 1,5\mathbb{E}(X) - 6 = 0$. En moyenne, l'étudiant peut espérer $\boxed{0/12}$ au QCM!

Exemple 41 **(Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)** Soient (R_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{R}(p)$ avec $p \in [0,1]$. On pose :

$$S_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = R_1 + \cdots + R_n.$$

Interpétation : on a la relation $S_{n+1} = S_n + R_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsqu'on est en une position S_n, on avance donc de 1 (ou recule de 1) pour arriver en S_{n+1}.



AVANCEMENT DANS LA MARCHE ALÉATOIRE

1. Déterminer la loi de S_2 en s'aidant d'un arbre.

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $X_i = \dfrac{R_i + 1}{2}$. Quelle est la loi de X_i ?

3. Déduire la loi de $\dfrac{S_n + n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis l'espérance et la variance de S_n.

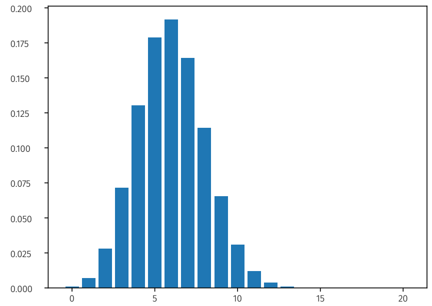
4. **[Application]** Un(e) élève de 1BC, sortant du BMF situé à une abscisse 0, titube. On suppose que cet(te) élève avance de 1 avec probabilité p, recule de 1 avec probabilité $1-p$. En moyenne, a-t-il(elle) une chance d'atteindre l'internat du Lycée MONTAIGNE situé à l'abscisse $x = 10$? Si oui, préciser environ au bout de combien de temps. Analysez l'effet de p sur ce temps.

HISTOGRAMME, FONCTION DE RÉPARTITION. Même principe que pour la loi uniforme, on reprend les scripts précédents en modifiant l'univers-image et la loi. Notez que, étant donné le choix de paramètres, l'univers-image de la loi se concentre dans la partie gauche du graphique (l'espérance vaut $\dfrac{20}{3}$).

(Histogramme de la loi binomiale)

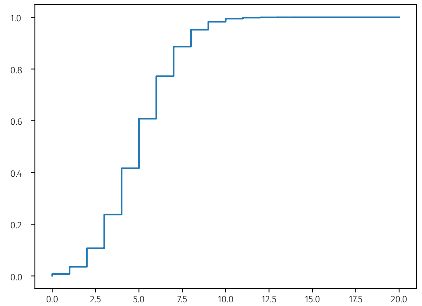
```python
import scipy.special

def binom(n, k):
    """
    (n : int, k : int) -> renvoie le coefficient binomial k parmi n
    """
    if k > n:
        return 0
    else:
        return scipy.special.binom(n, k) #commande toute faite pour le coefficient binomial

n = 20
p = 0.3
Support = range(0, n+1)
Loi = [0 for _ in range(len(Support))]
for k in range(len(Support)):
```

```
    Loi[k] = binom(n, k)*(p**k)*((1-p)**(n-k))
plt.bar(Support, Loi)
```



(Fonction de répartition de la loi $\mathscr{B}(20,0.3)$)

```
trace_fdr(Support, Loi)
```



SIMULATION. Le point de départ pour ces deux lois est la simulation d'une BERNOULLI, qui se fait en regardant dans quelle portion de l'intervalle $[0,1[$ ($[0,p]$ ou $[p,1-p[$) se trouve `rd.random()`. Ensuite pour déduire la bionomiale un certain nombre de résultats, d'où l'importance de bien connaître l'interprétation de ces lois en terme d'expérience aléatoire. Nous ferons de-même pour la loi géométrique plus tard.

(Simulation de la loi de BERNOULLI et de la binomiale)

```
import random as rd
def bernoulli(p):
    """
    simule une bernoulli
    """
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

```
import random as rd
def binomiale(n,p):
    """
    simule une binomiale
    """
    S = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < p:
            S += 1
    return S
```

Le module `random` ne sait pas simuler directement les lois de BERNOULLI et binomiale. On fait donc plutôt appel pour cela à la sous bibliothèque `random` de `numpy`.

```
np.random.binomial(n,p)
np.random.binomial(n,p,nb_simu) # Si l'on souhaite un tableau \
↪ numpy de simulations
```

4.3. Bilan des lois finies

Le tableau suivant rassemble quelques lois finies usuelles.

Nom	Paramètre(s)	Notation	Support $X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	Modélisation
BERNOULLI	$p \in [0,1]$	$\mathscr{B}(p)$	$\{0,1\}$	p si $k=1$ $1-p$ si $k=0$	expériences à deux issues
RADEMACHER	$p \in [0,1]$	$\mathscr{R}(p)$	$\{-1,1\}$	p si $k=1$ $1-p$ si $k=-1$	expériences à deux issues
Binomiale	$(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$	$\mathscr{B}(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	expériences de comptage du nombre de succès dans n expériences de BERNOULLI indépendantes

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les paramètres d'une variable aléatoire :
   - Connaître la définition de l'espérance . . . . . . ☐
   - savoir utiliser la formule de transfert . . . . . . ☐
   - Connaître la définition de la variance . . . . . . ☐
   - savoir utiliser la formule de KÖNIG-HUYGENS . . . . . . ☐
2. Concernant les lois usuelles, il faut connaître
   - la définition et les paramètres de la loi certaine . . . . . . ☐
   - la définition et les paramètres de la loi uniforme . . . . . . ☐
   - la définition et les paramètres de la loi de BERNOULLI . . . . . . ☐
   - la définition et les paramètres de la loi binomiale . . . . . . ☐
3. Savoir simuler avec Python les différentes lois . . . . . . ☐

5.1. Calculs & Généralités

Exercice 1 | Solution On dispose d'un dé à 6 faces non truqué. Il possède une face portant le chiffre 1, 2 faces portant le chiffre 2 et 3 faces portant le chiffre 3. On le lance et on note X le chiffre obtenu. Donner la loi de X, sa fonction de répartition et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 | Solution La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0.10	0.35	0.15	0.25	0.15

1. Tracer le diagramme en bâtons de X, c'est-à-dire un diagramme en bâtons de pieds les éléments x de $X(\Omega)$, et hauteur $\mathbb{P}(X = x)$.
2. Donner sa fonction de répartition et en donner le graphe.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X > -1)$, $\mathbb{P}(-3.5 < X \leqslant -2)$.
4. Donner les lois de probabilité des variables aléatoires réelles : $|X|$, $Y = X^2 + X - 2$, $Z = \min(X, 1)$, $T = \max(X, -X^2)$.

Exercice 3 | Solution Soit $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$ et X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans $[\![0\,,\,3]\!]$ dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \theta, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2} - \theta.$$

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.

Exercice 4 | Solution On considère un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité d'obtenir la face numérotée k soit proportionnelle à k. Soit X la variable aléatoire réelle finie égale au numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer la loi de Y et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Faire de même avec les variable aléatoire réelle finie $Z = (X-2)(X-5)$ et $T = \left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor$.
4. Donner un majorant de $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{13}{3}\right| \geqslant \frac{2}{3}\right)$ puis de $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{13}{3}\right| \geqslant 2\right)$ à l'aide de l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. Comparer avec la valeur exacte.

Exercice 5 | Solution Un tireur doit toucher n cibles ($n \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la k-ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p_k \in]0, 1[$. On note X le nombre de cibles touchées.

1. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que, pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $p_k = p$.
   2.1) Déterminer la loi de X en fonction de p et de $q = 1 - p$.
   2.2) Pour tout $t \in \{0, 1\}$, on définit la fonction génératrice associée à X par : $G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$. Justifier que $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$ et en déduire l'espérance de X ainsi que la limite de $\mathbb{E}(X)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 | Solution On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} & \text{si } -2 \leqslant x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 3, \\ \frac{2}{3} & \text{si } 3 \leqslant x < 4, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 4. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une variable aléatoire réelle finie ayant F pour fonction de répartition. Calculer alors $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ et $\mathbb{P}(-2 \leqslant X \leqslant 0)$.
3. Déterminer aussi la loi de X, son espérance et sa variance.
4. Soit Y et Z les variable aléatoire réelle finie définies par $Y = \frac{X}{2}$ et $Z = X+2$. Déterminer les fonctions de répartition de Y et de Z et tracer leurs courbes représentatives sur le même graphique que F.

Exercice 7 | Fonction génératrice Solution Dans tout l'exercice, on se fixe une variable aléatoire réelle finie X, et on note $X(\Omega) = \{k_0, \dots, k_N\}$ avec $k_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in [\![0, N]\!]$. On suppose de plus que la suite $(k_i)_{0\leqslant i\leqslant N}$ est croissante. On considère :

$$G_X : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}\left(t^X\right),$$

appelée *fonction génératrice de* X.

1. Montrer que G_X est une fonction polynomiale, précisez son degré ainsi que ses coefficients.
2. Montrer que : $\forall j \in [\![0, N]\!], \quad \mathbb{P}\left(X = k_j\right) = \dfrac{G_X^{(k_j)}(0)}{k_j!}$.
3. Calculer G_X' et G_X''. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ faisant intervenir G_X et ses dérivées.
4. **4.1)** Soit Y une autre variable aléatoire finie indépendante de Y. Montrer que :
   $$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$
   4.2) Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, et $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ indépendantes avec $p \in]0,1[$. On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$. À l'aide des questions précédentes, retrouver la valeur de l'espérance et de la variance de S_n.

5.2. Expériences avec lois usuelles

L'objectif des exercices de cette section est donc, comme son nom l'indique, d'utiliser au maximum les lois usuelles du cours ainsi que leurs propriétés.

Exercice 8 | Relations entre paramètres Solution

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, q]\!])$ avec $q \in \mathbb{N}^\star$ telle que $\mathbb{E}(X) = 5$. Déterminer q.
2. Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$ telle que $\mathbb{E}(Y) = \sigma(Y) = \dfrac{3}{4}$. Déterminer n et p.

Exercice 9 | Solution Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 2 km à la vitesse de 10km/h. Il doit franchir 10 obstacles indépendants les uns des autres. La probabilité de franchir un obstacle est de $\dfrac{3}{5}$.

1. On note X la variable aléatoire réelle finie qui désigne le nombre d'obstacles franchis sans fautes par le cavalier. Déterminer la loi, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.
2. On suppose que si le cavalier franchit un obstacle sans faute, il ne perd pas de temps et qu'il perd 30 secondes sinon. Calculer le temps moyen d'un parcours.

Exercice 10 | Différents contextes de lois usuelles Solution Pour chacune des variables aléatoires réelles aléatoires décrites ci-dessous, donner la loi exacte, l'espérance et la variance. On la notera X dans chaque question.

1. Nombre de piles au cours du lancer de 20 pièces truquées dont la probabilité d'obtenir face est 0.7.
2. On lance 5 dés.
   2.1) On s'intéresse au nombre de 6.
   2.2) On s'intéresse au numéro obtenu avec le premier dé.
3. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants sachant que la probabilité d'obtenir une fille est 0.51.
4. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote.
5. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Nombre d'objets dans le premier tiroir.
6. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Nombre de bosses.
7. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 1000 trèfles. Nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.
8. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue.

Exercice 11 | Solution Un magicien possède une pièce truquée qui renvoie pile avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et face avec probabilité $\dfrac{2}{3}$. Il lance la pièce n fois, et on note X la fréquence d'apparition du pile au cours de ces n lancers.

1. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.
2. On note p_n la probabilité que l'erreur entre X et son espérance soit supérieure à 0.1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, calculer le nombre de lancers n à effectuer pour que p_n soit inférieure à 0.2.

Exercice 12 | Un dé Solution On lance 6 fois un dé non pipé et on note X le nombre de 6 obtenus au cours de ces lancers.

1. Calculer la loi de X.
2. Calculer la fonction de répartition de X. *La formule pourra faire intervenir une somme.*
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle finie $Y = (X-3)^2$.
5. On considère $g : x \longmapsto \cos(\pi x)$ et on pose $Z = g(X)$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire réelle finie Z.

Exercice 13 | Deux dés, et min / max Solution On lance deux dés à 6 faces honnêtes. On note alors X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. Comparer les espérances et commenter.

5.3. Expériences générales

Exercice 14 | Solution On lance m dés non truqués numérotés de 1 à m.

1. Soit X_1 la variable aléatoire réelle égale au nombre de dés amenant le 6. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors du deuxième lancer. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = k)$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$. En déduire la loi de X_2 son espérance et sa variance. *Indication : On pourra montrer en particulier que :* $\binom{m}{i}\binom{m-i}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{i}$
3. On poursuit l'expérience précédente : à chaque lancer, on relance uniquement les dés qui n'ont pas donné 6 aux lancers précédents. Soit X_n la variable aléatoire réelle finie égale au nombre de dés amenant 6 au n-ième lancer.
   - **3.1)** Soit $Z_{i,n}$ la variable aléatoire réelle valant 1 si le dé numéroté i donne 6 au n-ième lancer et 0 sinon. Calculer la loi de $Z_{i,n}$.
   - **3.2)** Déterminer l'espérance de X_n.

Exercice 15 | Solution Dans un jeu télévisé, le candidat doit répondre à 20 questions. Pour chacune d'elles, l'animateur propose au candidat trois réponses possibles, une seule étant la réponse exacte. Les questionnaires sont établis de façon que l'on puisse admettre que :

- un candidat retenu pour participer au jeu connaît la réponse exacte pour 60% des questions et donne une réponse au hasard pour les autres ;
- les questions posées lors du jeu sont indépendantes.

1. On considère l'événement E_i : le candidat donne la réponse exacte à la i-ème question. Calculer $\mathbb{P}(E_i)$.
2. On note X la variable aléatoire réelle finie égale au nombre de réponses exactes données par le candidat aux 20 questions du jeu. Donner la loi de probabilité de X.
3. Quel est le nombre moyen de bonnes réponses données par le candidat ?

Exercice 16 | **Marche aléatoire symétrique** Solution Une puce se déplace sur un axe par sauts indépendants et d'amplitude 1, aléatoirement vers la gauche ou la droite. Soit X_n sa position après n sauts (elle commence à la position 0). Soit Y_n le nombre de fois où elle a sauté vers la droite au cours des n premiers sauts.

1. Donner la loi de Y_n.
2. Après avoir exprimé X_n en fonction de Y_n, montrer que :
$$X_n(\Omega) \subset [\![-n, n]\!], \quad \forall k \in [\![-n, n]\!], \mathbb{P}(X_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } n+k \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n+k \text{ impair.} \end{cases}$$
3. On suppose que n est pair. Quelles est la probabilité p_n que la puce revienne à son point de départ après n sauts ? Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On admettra la formule de* S*TIRLING :* $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

5.4. Récurrence & Chaîne de MARKOV

Exercice 17 | Solution On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geqslant 1$, on note Y_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ième tirage.

1. Déterminer Y_1.
2. Soit $n \geqslant 2$.
   - **2.1)** Justifier que $Y_n \leqslant N - 1$.
   - **2.2)** Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a : $\mathbb{P}(Y_n = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k+1)$.
3. En déduire que la suite $(\mathbb{E}(Y_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{E}(Y_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 18 | Solution Un jeune homme écrit à une jeune fille au cours d'une année non bissextile. Il adopte la résolution suivante :

- le jour de l'an, il lui écrit à coup sûr.
- S'il lui a écrit le jour i, il lui écrit le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- S'il ne lui a pas écrit le jour i, il lui écrit le lendemain à coup sûr.

Soit X_i la variable aléatoire réelle finie de BERNOULLI valant 1 si le jeune homme écrit le jour i et 0 sinon.

1. Former une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)$ et $\mathbb{P}(X_i = 1)$.
2. En déduire la loi de X_i pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$.
3. Soit X la variable aléatoire réelle finie égale au nombre de lettres envoyées dans l'année. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 19 | **Marche aléatoire vers l'avant avec retour en zéro** Solution Un mobile se déplace sur un axe de la façon suivante :

- à l'instant 0, il est au point d'abscisse 0 ;

- si, à l'instant n, le mobile est au point d'abscisse $k \in \mathbb{N}$, alors, à l'instant $n+1$, soit il sera au point d'abscisse $k+1$ avec une probabilité $p \in]0,1[$, soit il retournera au point 0 avec une probabilité $1-p$.

On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1.
   1.1) Créer une fonction d'en-tête `Simu_X(n, p)` qui simule une réalisation de X_n.
   1.2) En déduire une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$ à l'aide de la fonction précédente.
2. Déterminer la loi de X_1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$.
4. En déduire une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n-1})$ pour $n \geqslant 1$.
5. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et p.

Exercice 20 | Après la pluie viendra peut-être le beau temps Solution Dans un certain pays, il fait rarement beau deux jours de suite.

- Si un jour il fait beau, le lendemain il fait moche avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- Si un jour il fait moche, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain.

On note M « il fait moche », et B « il fait beau », et X_n l'état du temps au jour n pour tout n, ainsi que pour tout $n \geqslant 1$: $Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = B) \\ \mathbb{P}(X_n = M) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $M \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$Z_{n+1} = MZ_n.$$
2. Vérifier que $M = PDP^{-1}$, avec P inversible, D diagonale, de format 2×2, à déterminer. *Indication : On pourra introduire* $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
3. Proposer une fonction `simu_temps(n, temps_initial)` et qui retourne une simulation de X_n, où le temps initial à $n = 1$ est donné par `temps_initial`. Conjecturer alors une comparaison entre les deux limites ci-dessous, en admettant l'existence : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = M)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = B)$. Le temps initial influe-t-il sur ces limites ?
4. Démontrer cette conjecture. Est-ce conforme à l'intuition ? *On pourra commencer par introduire* $Y_n = P^{-1}X_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$*, et chercher une récurrence simple sur* Y_n

Exercice 21 | Souris dans un tunnel Solution Des chercheurs font des expériences sur des souris, ils disposent de trois tunnels A, B et C. Les deux premiers sont des cul-de-sac et le troisième, le C, permet à la souris de sortir. On constate que :

- la première fois, elle choisit au hasard l'un des trois tunnels.
- Lorsque la souris se trompe (donc aboutit à un cul-de-sac), la fois d'après, elle choisit au hasard l'un des deux autres tunnels.
- Lorsqu'elle réussit à sortir, la fois d'après, elle reprend le même tunnel.

On note X_n le tunnel choisi (donc A,B,C) à la $n \in \mathbb{N}^\star$-ième tentative de sortie, et on note pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$: $Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = A) \\ \mathbb{P}(X_n = B) \\ \mathbb{P}(X_n = C) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer Z_1.
2. Déterminer une matrice $M \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad Z_{n+1} = MZ_n.$$
3. Vérifier que avec $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale à trouver.
4. On note à présent $Y_n = P^{-1}X_n$, montrer que $Y_{n+1} = DY_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. En déduire l'existence et la valeur des limites
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = A), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = B), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = C).$$
Est-ce conforme à l'intuition ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé

- Univers image : les seuls numéros que l'on peut obtenir sont 1, 2 et 3, donc $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
- Calcul de la loi de X. Le dé est non truqué, on a donc équiprobabilité pour chacune des faces du dés. On a 6 faces en tout, et une seule ayant le numéro 1, donc $\boxed{\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{6}}$. On a deux faces portant le numéro 2, donc $\mathbb{P}(X=2) = \frac{2}{6}$, soit $\boxed{\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{3}}$. Enfin, on a trois faces portant le numéro 3, donc $\mathbb{P}(X=3) = \frac{3}{6}$, soit $\boxed{\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{2}}$.
- fonction de répartition : on utilise la formule du cours,
  - si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
  - si $1 \leqslant x < 2$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{6}$,
  - si $2 \leqslant x < 3$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$,
  - si $x \geqslant 3$, on a $F_X(x) = 1$.
- Espérance : on calcule

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 2 \times \mathbb{P}(X=2) + 3 \times \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

  soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{7}{3}}$.
- Variance : on utilise la formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

  On calcule $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ grâce au théorème du transfert :

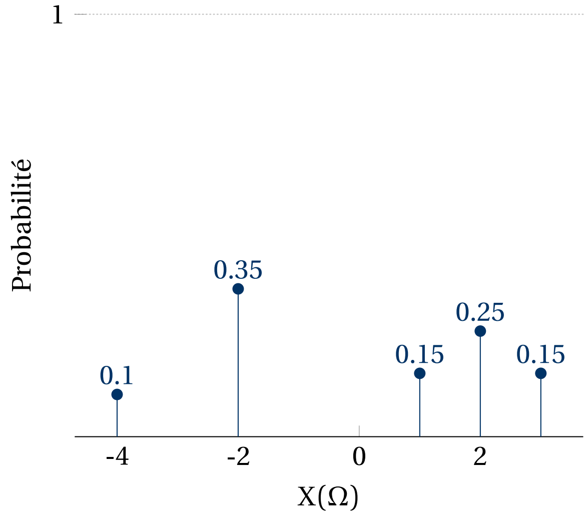
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X=2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = 6$$

  soit $\mathbb{V}(X) = 6 - \frac{49}{9}$, et donc : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{5}{9}}$.

Solution (exercice 2) Énoncé La loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0.10	0.35	0.15	0.25	0.15

1. On suit donc la définition de l'énoncé.



2. D'après la formule du cours :
- si $x < -4$, on a $F_X(x) = 0$,
- si $-4 \leqslant x < -2$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X=-4) = 0.10$,
- si $-2 \leqslant x < 1$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X=-4) + \mathbb{P}(X=-2) = 0.45$,
- si $1 \leqslant x < 2$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X=-4) + \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=1) = 0.6$,
- si $2 \leqslant x < 3$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X=-4) + \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 0.85$,
- si $x \geqslant 3$, on a $F_X(x) = 1$.

3. On a $\{X=0\} \cup \{X<0\} = [X \leq 0]$, et comme ce sont des événements incompatibles, on a $\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X \leq 0)$. On en déduit : $\mathbb{P}(X<0) = \mathbb{P}(X \leq 0) - \mathbb{P}(\{X=0\}) = F_X(0) - 0$, soit $\boxed{\mathbb{P}(X<0) = 0.45}$.
De même, $\mathbb{P}(\{X > -1\}) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant -1) = 1 - F_X(-1) = 1 - 0.45$, soit $\boxed{\mathbb{P}(\{X > -1\}) = 0.55}$.
Enfin, $\mathbb{P}(-3{,}5 < X \leqslant -2) = \mathbb{P}(X \leqslant -2) - \mathbb{P}(X \leqslant -3{,}5) = F_X(-2) - F_X(-3.5)$, soit $\boxed{\mathbb{P}(-3{,}5 < X \leqslant -2) = 0.35}$.

4. Ici je donne juste les résultats :

x_i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(\lvert X\rvert = x_i)$	0,15	0,60	0,15	0,10

y_i	0	4	10
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	0,25	0,25	0,5

z_i	-4	-2	1
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	0,10	0,35	0,55

t_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbb{P}(T = t_i)$	0,10	0,35	0,15	0,25	0,15

Solution (exercice 3) Énoncé

1. D'après la formule du cours :

- si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,
- si $0 \leqslant x < 1$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X = 0) = \theta$,
- si $1 \leqslant x < 2$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \theta + \frac{1}{2} - \theta = \frac{1}{2}$,
- si $2 \leqslant x < 3$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \theta + \frac{1}{2} - \theta + \frac{1}{2} - \theta = 1 - \theta$,
- si $x \geqslant 3$, on a $F_X(x) = 1$.

2. Espérance : on calcule

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{3} k\mathbb{P}(X = k) = 0 \times \theta + 1 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 2 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 3\theta$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}}$ (ce qui était attendu, puisque X est symétrique).

Pour la variance, on utilise la formule de KÖNIG-HUYGENS : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, en calculant $\mathbb{E}(X^2)$ grâce au théorème du transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2\mathbb{P}(X = k) = 0^2 \times \theta + 1^2 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 2^2 \times \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + 3^2\theta = 4\theta + \frac{5}{2}.$$

On obtient $\boxed{\mathbb{V}(X) = 4\theta + \frac{1}{4}}$.

3. On remarque que $R(\Omega) = \{0\}$, donc R est constante égale à 0 : $\boxed{\mathbb{P}(R = 0) = 1}$.

Solution (exercice 4) Énoncé

1.
- Loi de X. On a $X(\Omega) = [\![1\,,6]\!]$, et on sait que pour tout $k \in [\![1\,,6]\!]$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \alpha$ avec α à déterminer. Or on a $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1$, donc :
$$\sum_{k=1}^{6} \alpha k = 1 \Longrightarrow \alpha\frac{6 \times 7}{2} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{21}.$$
On obtient donc $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{21}}$.
- fonction de répartition. On utilise la formule du cours :
  - ◇ si $x < 1$, on a $F_X(x) = 0$,
  - ◇ si $k \leqslant x < k + 1$, avec $k \in [\![1\,,5]\!]$, on a $F_X(x) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{21}$, soit
  $$F_X(x) = \frac{k(k+1)}{42}.$$
  - ◇ si $x \geqslant 6$, on a $F_Y(x) = 1$.
- Espérance. On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6 \times 21}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{91}{21}}$.
- Variance. On applique la formule de KÖNIG-HUYGENS : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, en calculant $\mathbb{E}(X^2)$ grâce au théorème du transfert :
$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^3}{21} = \frac{1}{21} \times \left(\frac{6(6+1)}{2}\right)^2 = \frac{441}{21}$$
soit : $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{441}{21} - \left(\frac{91}{21}\right)^2 \simeq 2.2}$.

2. On a $Y(\Omega) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$. De plus, pour tout $k \in [\![1\,,6]\!]$, on a $\boxed{\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{k}\right) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{21}}$. On utilise le théorème du transfert pour calculer l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21} \Longrightarrow \boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{6}{21}}.$$

3. On donne ici uniquement les résultats :

z_i	-2	0	4
$\mathbb{P}(Z = z_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

t_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(T = t_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{6}{21}$

On en déduit $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{3}}$ et $\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{41}{21}}$.

4. Donner un majorant de $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{13}{3}\right| \geqslant \frac{2}{3}\right)$ puis de $\mathbb{P}\left(\left|X - \frac{13}{3}\right| \geqslant 2\right)$ à l'aide de l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV. Comparer avec la valeur exacte.

Solution (exercice 5) Énoncé

1. On commence par trouver l'univers image : on peut toucher de 0 à n cibles, donc $X(\Omega) = [\![0\,, n]\!]$.

Notons F_k l'événement « le tireur touche la k-ième cible ». D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(F_k) = p_k$. De plus, on a, pour tout $k \in [\![1\,, n-1]\!]$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap \bar{F}_{k+1}\right),$$
car pour toucher exactement k cibles, il faut réussir les k premiers coups, et rater la cible au $k+1$-ième essai. On a, d'après la formule des probabilités composées, comme $\mathbb{P}(F_1 \cap \ldots \cap F_k) \neq 0$) :
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{F_1 \cap \ldots \cap F_k}\left(\bar{F}_{k+1}\right)$$
d'où $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = p_1 p_2 \ldots p_k(1 - p_{k+1})}$.

Pour $k = 0$, il faut rater la première cible, donc $\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p_1}$.

Pour $k = n$, il faut toucher toutes les cibles. le même raisonnement donne

$\boxed{\mathbb{P}(X=n) = p_1 p_2 \dots p_n}$.

2. **2.1)** D'après la question précédente, on a, pour $k \in [\![0\ ,\ n-1]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = p^k q}$, et $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = p^n}$.

2.2) D'après le théorème de transfert, on a

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(X=k).$$

Cette expression est un polynôme en t, donc est bien dérivable par rapport à t, et on a :

$$G'_X(t) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k t^{k-1} \mathbb{P}(X=k).$$

On en déduit :

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k),$$

On a donc bien : $\boxed{G'_X(1) = \mathbb{E}(X)}$. Calculons $G_X(t)$. On a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(X=k) = q + \sum_{k=1}^{n-1} t^k p^k q + t^n p^n = q\sum_{k=0}^{n-1} (tp)^k + t^n p^n.$$

Or $tp \neq 1$, donc on a :

$$G_X(t) = q\frac{1-(tp)^n}{1-tp} + t^n p^n.$$

On dérive :

$$G'_X(t) = q\frac{-np(tp)^{n-1}(1-tp) - (1-(tp)^n)(-p)}{(1-tp)^2} + nt^{n-1}p^n.$$

On prend la valeur en $t=1$, et on obtient

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = q\frac{-np^n(1-p)+p(1-p^n)}{(1-p)^2} + np^n = -np^n + \frac{p}{q}(1-p^n) + np^n.$$

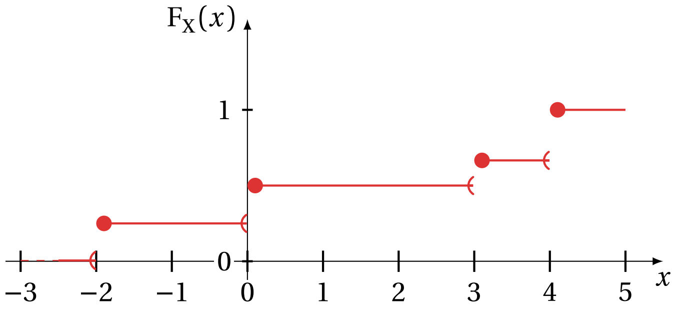
en utilisant le fait que $1-p=q$. On a donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{p}{q}(1-p^n)}$.

On a $p \in]0,1[$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} p^n = 0$. De plus, $np^n = ne^{n\ln p}$ avec $\ln p < 0$, donc par théorème des croissances comparées on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} np^n = 0$.

Donc finalement, $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(X) = \frac{p}{q}}$.

Solution (exercice 6) Énoncé

1. Traçons la courbe représentative de F.



2. Par définition, $\boxed{\mathbb{P}(X \leqslant 1) = F(1) = \frac{1}{2}}$.

On a de plus $\mathbb{P}(X=1) = 0$ car la fonction F n'a pas de saut en 1, donc $\boxed{\mathbb{P}(X<1) = \mathbb{P}(X \leqslant 1) = \frac{1}{2}}$.

On a $\mathbb{P}(-2 \leqslant X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) - \mathbb{P}(X < -2) = F(0) - 0$, soit $\boxed{\mathbb{P}(-2 \leqslant X \leqslant 0) = \frac{1}{2}}$.

3. On a $X(\Omega) = \{-2, 0, 3, 4\}$ car ce sont les points de discontinuité de F. De plus, les probabilités de chaque élément de $X(\Omega)$ sont égale à la valeur du saut de F, soit :

- $\mathbb{P}(X=-2) = F(-2) = \frac{1}{4}$,
- $\mathbb{P}(X=0) = F(0) - F(-2) = \frac{1}{4}$,
- $\mathbb{P}(X=3) = F(3) - F(0) = \frac{1}{6}$,
- $\mathbb{P}(X=4) = F(4) - F(3) = \frac{1}{3}$,

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = -2\mathbb{P}(X=-2) + 0\mathbb{P}(X=0) + 3\mathbb{P}(X=3) + 4\mathbb{P}(X=4)$$

soit : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{4}{3}}$.

De plus, d'après la formule de König-Huygens, on a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$. Et le théorème du transfert donne :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = (-2)^2\mathbb{P}(X=-2) + 0^2\mathbb{P}(X=0) + 3^2\mathbb{P}(X=3) + 4^2\mathbb{P}(X=4),$$

soit $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{47}{6}$ et donc $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{109}{18}}$.

4. On a $Y(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{3}{2}, 2\right\}$, et $Z(\Omega) = \{0, 2, 5, 6\}$ et les probabilités sont les mêmes que précédemment, donc on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad F_Y(t)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-2\\ \frac14 & \text{si } -1\leqslant x<0\\ \frac12 & \text{si } 0\leqslant x<\frac32\\ \frac23 & \text{si } \frac32\leqslant x<2\\ 1 & \text{si } x\geqslant 2.\end{cases}\quad \text{et :}\quad \forall t\in\mathbb{R},\quad F_Z(t)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-2\\ \frac14 & \text{si } 0\leqslant x<2\\ \frac12 & \text{si } 2\leqslant x<5\\ \frac23 & \text{si } 5\leqslant x<6\\ 1 & \text{si } x\geqslant 6.\end{cases}$$

Le graphe de F_Z est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre 0 du graphe de F, et celui de F_Z le translaté de vecteur $2\vec{i}$ de F.

Solution (exercice 7) Énoncé

1. Puisque $X(\Omega)$ est supposé fini, on a d'après le théorème de transfert :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad G_X(t)=\sum_{i=0}^{N} t^{k_i}\mathbb{P}(X=k_i).$$

Donc G_X est une $\boxed{\text{fonction polynomiale de degré } k_N}$ puisque la suite des k_i est supposée croissante. De plus, les coefficients sont

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k_0),\dots,\mathbb{P}(X=k_N)}.$$

Puisque deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on déduit que deux variables aléatoires finies ont même loi si et seulement si elles ont même fonction génératrice.

2. Soit $j\in[\![0,N]\!]$,

$$\begin{aligned}G_X^{k_j}(t)&=\left(\sum_{i=0}^{N} t^{k_i}\mathbb{P}(X=k_i)\right)^{k_j}\\ &=\sum_{i=0}^{N} k_i\cdot(k_i-1)\cdot\dots\cdot(k_i-k_j+1)t^{k_i-k_j}\mathbb{P}(X=k_i)\end{aligned}$$

$$G_X^{k_j}(0)=k_j\cdot(k_j-1)\cdot\dots\cdot(k_j-k_j+1)\mathbb{P}\left(X=k_j\right)+0$$

Donc

$$\forall j\in[\![0,N]\!],\quad \boxed{\frac{G_X^{k_j}(0)}{k_j!}=\mathbb{P}\left(X=k_j\right)}.$$

3. Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$G_X'(t)=\sum_{i=1}^{N} k_i t^{k_i-1}\mathbb{P}(X=k_i)$$

$$G_X''(t)=\sum_{i=2}^{N} k_i(k_i-1)t^{k_i-2}\mathbb{P}(X=k_i)$$

$$G_X'(1)=\sum_{i=1}^{N} k_i 1^{k_i-1}\mathbb{P}(X=k_i)=\mathbb{E}(X)$$

$$G_X''(1)=\sum_{i=2}^{N} k_i(k_i-1)1^{k_i-2}\mathbb{P}(X=k_i)=\mathbb{E}(X(X-1)).$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X)=G_X'(1)}$, et puisque $\mathbb{E}(X(X-1))=G_X''(1)$, on déduit que

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)=G_X''(1)+G_X'(1),$$

donc par König-Huygens :

$$\boxed{\mathbb{V}(X)=G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2}.$$

4. 4.1) Soit $t\in\mathbb{R}$, alors par théorème du cours, t^X, t^Y sont indépendantes, donc

$$\mathbb{E}\left(t^{X+Y}\right)=\mathbb{E}\left(t^X\cdot t^Y\right)=\mathbb{E}\left(t^X\right)\cdot\mathbb{E}\left(t^Y\right)=G_X(t)\cdot G_Y(t).$$

Donc : $\boxed{G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t).}$

4.2) Afin de retrouver les expressions de l'espérance et de la variance de S_n, il faut commencer par calculer la fonction génératrice. En exploitant la question précédente, on a par récurrence immédiate :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad G_{X_1+\dots+X_n}(t)=G_{X_1(t)}\cdot\dots\cdot G_{X_n}(t).$$

Or, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a pr théorème de transfert :

$$G_{X_i}(t)=t^0(1-p)+t^1p=1-p+tp.$$

Donc : $\forall t\in\mathbb{R},\quad G_{X_1+\dots+X_n}(t)=(1-p+tp)^n$. On déduit alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n)=G_{S_n}'(1)&=\left.\frac{d\left[(pt+1-p)^n\right]}{dt}\right|_{t=1}\\ &=pn(p+1-p)^{n-1}\\ &=\boxed{np},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n)&=G_{S_n}''(1)+G_{S_n}'(1)-G_{S_n}'(1)^2\\ &=p^2n(n-1)(p+1-p)^{n-2}+pn(p+1-p)^{n-1}\\ &\quad-\left(pn(p+1-p)^{n-1}\right)^2\\ &=\boxed{np(1-p).}\end{aligned}$$

Solution (exercice 8) Énoncé

1. L'espérance de la loi uniforme est donnée par $\mathbb{E}(X)=\frac{q+1}{2}$. On a donc $\frac{q+1}{2}=5$, soit $\boxed{q=9}$

2. On a $\mathbb{E}(Y)=np$ et $\sigma(Y)=\sqrt{np(1-p)}$. On doit donc résoudre

$$\begin{cases}np &=\frac34\\ \sqrt{np(1-p)} &=\frac34\end{cases}\iff\begin{cases}np &=\frac34\\ np(1-p) &=\frac{9}{16}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}np &=\frac34\\ \frac34(1-p) &=\frac{9}{16}\end{cases}\iff\begin{cases}np &=\frac34\\ p &=\frac14\end{cases}$$

On obtient donc $\boxed{n = 3,\ p = \frac{1}{4}}$.

Solution (exercice 9) Énoncé

1. On a $X(\Omega) = [\![0\,,\,10]\!]$. On a une succession de 10 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{3}{5}$, donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{5}$, donc on a $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(\frac{2}{5}\right)^{10-k}}$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = np = 6}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{12}{5}}$.
2. On note Y la variable aléatoire égale au temps du parcours en minutes. Le temps sans faute est de $2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$ heure, soit 12 minutes, et on enlève 30 secondes par faute, soit $\frac{1}{2}$ minute. Comme le nombre de fautes est $10 - X$, on a $Y = 12 + \frac{1}{2}(10 - X)$. Comme l'espérance est linéaire, on a
$$\mathbb{E}(Y) = 12 + \frac{1}{2}(10 - \mathbb{E}(X))$$
soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 14}$: le temps moyen d'un parcours est de 14 minutes.

Solution (exercice 10) Énoncé

1. Nombre de piles au cours du lancer de 20 pièces truquées dont la probabilité d'obtenir face est 0.7 : on a une succession de 20 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est 0.3, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(20, 0.3)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k}(0.3)^k(0.7)^{20-k}$, $\mathbb{E}(X) = 20 \times 0.3$, $\mathbb{V}(X) = 20 \times 0.3 \times 0.7$.
2. On lance 5 dés.
   2.1) On s'intéresse au nombre de 6 : on a une succession de 5 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0\,,\,5]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}^{5-k}\right)5 - k$, $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{25}{36}$.
   2.2) On s'intéresse au numéro obtenu avec le premier dé : on tire un numéro au hasard parmi 6 (car le dé est équilibré), donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1\,,\,6]\!])}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![1\,,\,6]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{35}{12}$.
3. Nombre de filles dans les familles de 6 enfants sachant que la probabilité d'obtenir une fille est 0.51 : on a une succession de 6 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est 0.51 donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(6, 0.51)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0\,,\,6]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{6}{k}(0.51)^k(0.49)^{6-k}$, $\mathbb{E}(X) = 6 \times 0.51$, $\mathbb{V}(X) = 6 \times 0.51 \times 0.49$.
4. Nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote : on a une succession de 100 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est p, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(100, p)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0\,,\,100]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{100}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $\mathbb{E}(X) = 100p$, $\mathbb{V}(X) = 100p(1-p)$, où p est la probabilité de voter pour ce candidat.
5. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. Nombre d'objet dans le premier tiroir : on a une succession de 20 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{3}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20, \frac{1}{3}\right)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0\,,\,20]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{20}{3}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{40}{9}$.
6. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. Nombre de bosses : on a autant de chance de tirer 0, 1 ou 2 bosses, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0\,,\,2]\!])}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0\,,\,2]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{V}(X) = \frac{4}{3}$.
7. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. Nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis : on a une succession de 100 expériences de Bernoulli indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{100}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{1}{100}\right)}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![0\,,\,100]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{100}{k}(0.01)^k(0.99)^{100-k}$, $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{V}(X) = \frac{99}{100}$.
8. Il y a 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire 10 parmi les 128, puis on en tire une parmi les 10. On s'intéresse au numéro de la boule obtenue : on a autant de chance de tirer n'importe quel numéro, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1\,,\,128]\!])}$. On en déduit : $X(\Omega) = [\![1, 128]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{128}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{129}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{128^2 - 1}{12}$.

Solution (exercice 11) Énoncé

1. On note Y le nombre d'apparitions du pile au cours des n lancers. Comme les expériences sont indépendantes et ont toutes la même probabilités de

succès $\frac{1}{3}$, Y suit une loi binomiale : $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$. On a donc $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$, et $\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, $\mathbb{E}(Y) = np = \frac{n}{3}$ et $\mathbb{V}(Y) = np(1-p) = \frac{2n}{9}$.

On a de plus $X = \frac{Y}{n}$. On en déduit alors, d'après les propriétés sur l'espérance et la variance : $X(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, et $\mathbb{P}\left(X = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{\mathbb{E}(Y)}{n} = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{\mathbb{V}(Y)}{n^2} = \frac{2}{9n}$.

2. D'après l'énoncé, on a $p_n = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 0.1)$. On cherche la valeur de n à partir de laquelle on a $p_n \leqslant 0.2$. Or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a : $p_n \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{0.1^2}$.

D'après la question précédente, on a donc $p_n \leqslant \frac{2}{9n \times 0.1^2}$. Pour avoir p_n inférieure à 0.2, il suffit donc d'avoir :
$$\frac{\mathbb{V}(X)}{0.1^2} \leqslant 0.2 \iff \frac{2}{9n \times 0.1^2} \leqslant 0.2 \iff n \geqslant \frac{2}{9 \times 0.1^2 \times 0.2}.$$
L'application numérique donne $\boxed{n \geqslant 112 \text{ lancers}}$.

Solution (exercice 12) Énoncé

1. On a une succession de 6 expériences aléatoires semblables et indépendantes, dont la probabilité de succès est $\frac{1}{6}$ (probabilité de tomber sur 6 pour un dé équilibré). On reconnaît donc une loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(6, \frac{1}{6}\right)$. On a donc $X(\Omega) = [\![0, 6]\!]$ et $\forall k \in [\![0, 6]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}}$.
2. On utilise la formule du cours permettant d'exprimer la fonction de répartition en fonction de la loi, qui donne :
   - si $x < 0$, on a $F_X(x) = 0$,
   - $\forall k \in [\![0, 5]\!]$, si $x \in [k, k+1[$, $F_X(x) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{6}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{6-i}$,
   - si $x \geqslant 6$, on a $F_X(x) = 1$.
3. On utilise les formules de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale : $\mathbb{E}(X) = 6 \times \frac{1}{6}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$, et $\mathbb{V}(X) = 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$, soit $\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{5}{6}}$.
4. Soit $h(x) = (x-3)^2$. On commence par calculer $Y(\Omega) = h([\![0, 6]\!]) = \{0, 1, 4, 9\}$. Puis on en déduit :
   - $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 3)$, soit $\boxed{\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{\binom{6}{3}5^3}{6^6}}$.
   - $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(\{X = 2\} \cup \{X = 4\}) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4)$ car ce sont des événements incompatibles. Soit $\boxed{\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{\binom{6}{2}5^4}{6^6} + \frac{\binom{6}{4}5^2}{6^6}}$.
   - $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cup \{X = 5\}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 5)$, soit $\boxed{\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{5^5}{6^5} + \frac{5}{6^5}}$.
   - $\mathbb{P}(Y = 9) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 6\}) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 6)$, soit $\boxed{\mathbb{P}(Y = 9) = \frac{5^6}{6^6} + \frac{1}{6^6}}$.
5. On commence par calculer $Z(\Omega) = g([\![0, 6]\!]) = \{-1, 1\}$. Puis on en déduit :
   - $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 6\})$, soit :
   $$\boxed{\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{6^6}\left(5^6 + \binom{6}{2}5^4 + \binom{6}{4}5^2 + 1\right)}.$$
   - $\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cup \{X = 3\} \cup \{X = 5\})$, soit :
   $$\boxed{\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{6^6}\left(5^5 + \binom{6}{3}5^3 + 30\right)}.$$

   On en déduit l'espérance avec la formule $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{P}(Z = 1) - \mathbb{P}(Z = -1)$.

Solution (exercice 13) Énoncé

1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. De plus, introduisons $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathscr{U}[\![1, 6]\!]$ deux variables aléatoires indépendantes de sorte que $X = \max(X, Y)$, $Y = \min(X, Y)$. Soit donc $k \in [\![1, 6]\!]$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \mathbb{P}(U_1 \leqslant k, U_2 \leqslant k) \quad \textit{indépendance}\\ &= \mathbb{P}(U_1 \leqslant k)\mathbb{P}(U_2 \leqslant k)\\ &= \left(\frac{k}{6}\right)^2.\end{aligned}$$
Donc pour tout $k \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) = \begin{cases} \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2 & \text{si } k \geqslant 2,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 & \text{si } k = 1.\end{cases}$$
Les deux formules se réunissent en une seule :
$$\boxed{\forall k \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2}.$$

Pour le minimum, on utilise plutôt l'antirépartition.

$$\mathbb{P}(Y \geqslant k) = \mathbb{P}(U_1 \geqslant k, U_2 \geqslant k) \underset{\textit{indépendance}}{=} \mathbb{P}(U_1 \geqslant k)\mathbb{P}(U_2 \geqslant k) = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2.$$

Donc pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geqslant k) - \mathbb{P}(Y \geqslant k+1) = \begin{cases} \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^2 & \text{si } k \leqslant 5,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^2 & \text{si } k = 6.\end{cases}$$

Les deux formules se réunissent en une seule :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 6]\!],\quad \mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2 - \left(\frac{6-k}{6}\right)^2}.$$

2. Calculons $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. Pour Y, on peut constater la relation ci-après afin de gagner du temps :

$$U_1 + U_2 = X + Y.$$

La variable aléatoire X est finie, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{6} k\left(\left(\frac{k}{6}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2\right)\\
&= \sum_{k=1}^{6}\left(k\left(\frac{k}{6}\right)^2 - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^2\right) - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^2\\
&\underset{\textit{téléscopage}}{=} 6\left(\frac{6}{6}\right)^2 - 0 - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^2\\
&\underset{\textit{changement d'indice}}{=} 6\left(\frac{6}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{5} k^2\\
&= \boxed{\frac{91}{36}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{E}(U_1) = \mathbb{E}(U_2) = \dfrac{1+6}{2} = \dfrac{7}{2}$, on déduit que

$$\mathbb{E}(Y) = 7 - \frac{91}{36} = \boxed{\frac{161}{36}}.$$

On observe bien

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\min(U_1, U_2)) \leqslant \mathbb{E}(\min(U_1, U_2)) = \mathbb{E}(Y).$$

Solution (exercice 14) Énoncé

1. On reconnaît une loi binomiale car X_1 est un nombre de succès, le succès correspondant à obtenir le chiffre 6 et l'expérience revient bien à répéter m fois la même expériences dans les mêmes conditions (car tous les dés sont identiques). On a ainsi $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(m, \frac{1}{6}\right)}$. On a ainsi :

$$\forall k \in [\![0, m]\!],\ \mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-k}.$$

De plus, on a : $\boxed{\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{m}{6} \text{ et } \mathbb{V}(X_1) = \dfrac{5m}{36}}$.

2. On peut commencer par vérifier l'indication.

- D'un côté, on a : $\displaystyle\binom{m}{\ell}\binom{m-\ell}{k} = \frac{m!}{\ell!k!(m-\ell-k)!}$ en simplifiant par $(m-\ell)!$.
- De l'autre côté, on a : $\displaystyle\binom{m}{k}\binom{m-k}{\ell} = \frac{m!}{\ell!k!(m-\ell-k)!}$ en simplifiant par $(m-k)!$.

Ainsi on a bien que : $\boxed{\binom{m}{\ell}\binom{m-\ell}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{\ell}}$. Passons à présent à la Loi de X_2 : on a $\boxed{X_2(\Omega) = [\![0, m]\!]}$. Soit $k \in X_2(\Omega)$. On remarque que pour calculer $\mathbb{P}(X_2 = k)$, on a besoin de connaître le nombre de dés que l'on relance lors du deuxième lancer. Et ainsi on a besoin de connaître le nombre de dés qui ont amené 6 lors du premier lancer. On utilise donc le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire réelle X_1. Ainsi comme $(\{X_1 = 0\}, \{X_1 = 1\}, \dots, \{X_1 = m\})$ est un système complet d'évènements et que pour tout $\ell \in [\![0, m]\!]$: $\mathbb{P}(X_1 = \ell) \neq 0$, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{\ell=0}^{m} \mathbb{P}(X_1 = \ell)\mathbb{P}_{X_1=\ell}(X_2 = k).$$

En utilisant la question 1, on obtient que : $\forall \ell \in [\![0, m]\!],\ \mathbb{P}(X_1 = \ell) = \displaystyle\binom{m}{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ell}\left(\frac{5}{6}\right)^{m-\ell}$.

Puis on a : $\mathbb{P}_{\{X_1=\ell\}}(X_2 = k) = \displaystyle\binom{m-\ell}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-\ell-k}$ car on sait que l'on relance alors $m-\ell$ dés. On peut alors calculer la somme et on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = k) &= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ell}\left(\frac{5}{6}\right)^{m-\ell}\binom{m-\ell}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{m-\ell-k}\\
&= \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{m-k}{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^{\ell+k}\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-2\ell-k}.
\end{aligned}$$

en utilisant l'égalité sur les coefficients binomiaux démontrée ci-dessus. On sort alors tout ce qui ne dépend pas de ℓ indice de sommation et on obtient que :

$$\mathbb{P}(X_2=k)=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m-k}{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^\ell\left(\frac{5}{6}\right)^{-2\ell}$$
$$=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m-k}{\ell}\left(\frac{6}{25}\right)^\ell.$$

Comme, pour tout $\ell>m-k$, on a : $\binom{m-k}{\ell}=0$, on obtient alors en utilisant la relation de Chasles que :

$$\mathbb{P}(X_2=k)=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\sum_{\ell=0}^{m-k}\binom{m-k}{\ell}\left(\frac{6}{25}\right)^\ell.$$

On reconnaît alors le binôme de Newton et on obtient que :

$$\mathbb{P}(X_2=k)=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{2m-k}\left(\frac{6}{25}+1\right)^{m-k}$$
$$=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^m\left(\frac{31}{25}\right)^{m-k}$$
$$=\binom{m}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^{m-k}\left(\frac{31}{25}\right)^{m-k}$$
$$=\binom{m}{k}\left(\frac{5}{36}\right)^k\left(\frac{31}{36}\right)^{m-k}.$$

Comme $\frac{31}{36}=1-\frac{5}{36}$, on reconnaît alors l'expression d'une loi binomiale et ainsi on a : $\boxed{X_2\hookrightarrow\mathscr{B}\left(m,\frac{5}{36}\right)}$.

Espérance et variance de X_2 : $\mathbb{E}(X_2)=\frac{5m}{36}$ et $\mathbb{V}(X_2)=\frac{155m}{36^2}$.

3. **3.1)** Ici, $Z_{i,n}$ suit une loi de Bernoulli, il suffit donc de calculer $\mathbb{P}(Z_{i,n}=1)$. Attention, pour que le dé donne 6 au i-ème lancer, il faut qu'avant il n'ait jamais donné 6 ! Comme les lancers sont indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(Z_{i,n}=1)=\underbrace{\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{5}{6}}_{n-1\text{ fois}}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6},\text{ soit }\boxed{Z_{i,n}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(\frac{5^{n-1}}{6^n}\right)}.$$

3.2) Comme X_n est le nombre de dés donnant 6 au i-ème lancer, on a $X_n=\sum_{i=1}^{m}Z_{i,n}$. Par linéarité de l'espérance, on a donc $\mathbb{E}(X_n)=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}(Z_{i,n})=\sum_{i=1}^{m}\frac{5^{n-1}}{6^n}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X_n)=m\times\frac{5^{n-1}}{6^n}}$. On vérifie qu'on retrouve bien le résultat obtenu pour X_2.

Solution (exercice 15) Énoncé

1. On note C_i l'événement « le candidat connaît la réponse à la i-ème question ». On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E_i)=\mathbb{P}(E_i\cap C_i)+\mathbb{P}(E_i\cap\bar{C}_i).$$

De plus, $\mathbb{P}(C_i)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}\neq0$, donc les probabilités conditionnelles existent et on a

$$\mathbb{P}(E_i)=\mathbb{P}_{C_i}(E_i)\mathbb{P}(C_i)+\mathbb{P}_{\bar{C}_i}(E_i)\mathbb{P}(\bar{C}_i)=1\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5},$$

car si le joueur connaît la réponse, il l'a donne à coup sûr, et sinon il a une chance sur 3 (équiprobabilité) de trouver la bonne réponse. On a donc finalement $\boxed{\mathbb{P}(E_i)=\frac{11}{15}}$.

2. On a $X(\Omega)=[\![0,20]\!]$. La variable aléatoire réelle finie X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{11}{15}$. On en déduit que $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, soit $\boxed{\mathbb{P}(X=k)=\binom{20}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{20-k}}$.

3. On a alors $\mathbb{E}(X)=np=20\times\frac{11}{15}$.

Solution (exercice 16) Énoncé

1. On reconnaît une loi binomiale car Y_n est un nombre de succès, le succès étant sauter vers la droite et que l'on répète bien n fois la même expérience dans les mêmes conditions. Ainsi on a : $\boxed{Y_n\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)}$. En effet il y a équiprobabilité de sauter à droite ou à gauche et ainsi la probabilité de sauter vers la droite vaut bien $\frac{1}{2}$. On a donc :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(Y_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\boxed{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

2.
- La position de la puce après n sauts en ayant commencé à 0 correspond au nombre de sauts faits à droite moins le nombre de sauts effectués à gauche. Or si Y_n est le nombre de sauts effectués à droite, $n-Y_n$ correspond alors au nombre de sauts effectués à gauche. Ainsi on a :
$$\boxed{X_n=Y_n-(n-Y_n)=2Y_n-n.}$$
- Univers image de X_n : la plus petite valeur atteinte est $-n$ (que des sauts à gauche), et la plus grande n (que des sautes à droite). Ainsi $\boxed{X_n(\Omega)\subset[\![-n,n]\!]}$. On peut cependant remarquer que tous les entiers entre $-n$ et n ne peuvent être atteints. Si n est pair, seuls les entiers pairs

peuvent être atteints, et si n est impair, seuls les entiers impairs peuvent être atteints !

- Soit $k\in[\![-n\,,\,n]\!]$ fixé. On a :
$$\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(2Y_n-n=k)=\mathbb{P}\left(Y_n=\frac{n+k}{2}\right).$$
Comme on connaît la loi de Y_n, on va pouvoir en déduire la loi de X_n. Pour cela il faut déjà savoir si, lorsque $k\in[\![-n\,,\,n]\!]$, on a : $\frac{n+k}{2}\in Y_n(\Omega)$. En effet :
$$k\in[\![-n\,,\,n]\!]\iff 0\leqslant n+k\leqslant 2n\iff 0\leqslant\frac{n+k}{2}\leqslant n.$$
Donc si $k\in[\![-n\,,\,n]\!]$, alors $0\leqslant\frac{n+k}{2}\leqslant n$. Mais il faut faire attention car $\frac{n+k}{2}$ n'est pas forcément un entier et ainsi on n'a pas forcément que : $\frac{n+k}{2}\in Y_n(\Omega)$. On doit donc distinguer deux cas selon que $n+k$ est pair ou impair :
  - ◇ **[Cas 1]** si k est tel que $n+k$ est impair : alors $\frac{n+k}{2}$ n'est pas un entier et ainsi $\frac{n+k}{2}\notin Y_n(\Omega)$ et donc $\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}\left(Y_n=\frac{n+k}{2}\right)=0$.
  - ◇ **[Cas 2]** si k est tel que $n+k$ est pair : alors $\frac{n+k}{2}$ est un entier et ainsi $\frac{n+k}{2}\in Y_n(\Omega)$ et donc $\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}\left(Y_n=\frac{n+k}{2}\right)=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On obtient ainsi la loi de X_n :
$$\boxed{\forall k\in[\![-n\,,\,n]\!],\quad \mathbb{P}(X_n=k)=\begin{cases}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\frac12\right)^n & \text{si } n+k \text{ pair}\\ 0 & \text{si } n+k \text{ impair.}\end{cases}}$$

3.
- Calcul de p_n : on cherche à calculer $p_n=\mathbb{P}(X_n=0)$. Comme n est pair par hypothèse, on a bien : $n+0$ qui est toujours pair et ainsi on obtient d'après la question précédente que :
$$\boxed{p_n=\mathbb{P}(X_n=0)=\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$
- Étude de la convergence : on utilise pour cela la formule de Stirling et on obtient que :
$$\binom{n}{\frac{n}{2}}=\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\left(\frac{e^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi n}}\right)^2.$$
Or on a :
$$\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\left(\frac{e^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi n}}\right)^2=\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\frac{e^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n n\pi}=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}2^n.$$
Ainsi on obtient que : $p_n\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ car $p_n=\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi : $\boxed{\lim_{n\to\infty}p_n=0}$.

Solution (exercice 17) Énoncé

1. À l'issue du premier tirage, un seul numéro a été tiré et il y a donc toujours $N-1$ numéros non encore tirés. Ainsi $Y_1(\Omega)=\{N-1\}$ et $\mathbb{P}(Y_1=N-1)=1$. $\boxed{Y_1 \text{ est donc certaine égale à } N-1.}$

2. **2.1)** Après n tirages, le nombre minimum de numéros sortis est 1 dans le cas où on a toujours tiré le même numéro. Ainsi le nombre maximum de numéros non encore sortis est $N-1$. Ainsi on vient bien de montrer que : $\boxed{Y_n\leqslant N-1}$. Ainsi on a : $Y_n(\Omega)=[\![0\,,\,N-1]\!]$.

2.2) Soit $k\in[\![0,N-1]\!]$ fixé. Pour obtenir $\{Y_n=k\}$ lors du tirage n, seulement deux cas sont possibles lors du tirage $n-1$. Soit on a : $\{Y_{n-1}=k\}$, soit on a : $\{Y_n=k+1\}$. En effet pour avoir k numéros non encore sortis au tirage n :
- soit il restait déjà k numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un numéro déjà sorti
- soit il restait $k+1$ numéros non encore sortis au tirage $n-1$ et lors du tirage n on a tiré un nouveau numéro jamais sorti.

Puis en utilisant ensuite la formule des probabilités totales, on obtient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n=k)=&\,\mathbb{P}(Y_{n-1}=k)\mathbb{P}_{Y_{n-1}=k}(Y_n=k)\\&+\mathbb{P}(Y_{n-1}=k+1)\mathbb{P}_{Y_{n-1}=k+1}(Y_n=k).\end{aligned}$$
D'après le protocole, on a : $\mathbb{P}(Y_{n-1}=k)\neq 0$ et $\mathbb{P}(Y_{n-1}=k+1)\neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles existent bien. On a alors :
- Pour obtenir $\{Y_n=k\}$ sachant $\{Y_{n-1}=k\}$, il faut choisir lors du tirage n un des $N-k$ numéros déjà sorti lors des $n-1$-ième premiers tirages. Ainsi on a : $\mathbb{P}_{Y_{n-1}=k}(Y_n=k)=\frac{N-k}{N}$.
- Pour obtenir $\{Y_n=k\}$ sachant $\{Y_{n-1}=k+1\}$, il faut choisir lors du tirage n un des $k+1$ numéros pas encore tirés lors des $n-1$-ième premiers tirages. Ainsi on a : $\mathbb{P}_{Y_{n-1}=k+1}(Y_n=k)=\frac{k+1}{N}$.

On obtient donc bien au final que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k) = \frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k) + \frac{k+1}{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k+1).}$$

3. • Par définition de l'espérance, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = k).$$

On utilise alors l'égalité démontrée à la question précédente afin d'essayer de trouver un lien entre $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)$ et $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-1})$. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n)\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k\left(\frac{\mathrm{N}-k}{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k) + \frac{k+1}{\mathrm{N}}\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k+1)\right)\\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k(\mathrm{N}-k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k) + \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k(k+1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k+1).
\end{aligned}$$

On pose alors le changement de variable $j = k+1$ dans la deuxième somme et on obtient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) &= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} k(\mathrm{N}-k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k) + \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} (k-1)k\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k)\\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} (k(\mathrm{N}-k) + (k-1)k)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k)\right) + 0 + (\mathrm{N}-1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} =\\
&= \frac{1}{\mathrm{N}}\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} k(\mathrm{N}-1)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k)\right).
\end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles puis en utilisant le fait que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = \mathrm{N}) = 0$ car $\mathrm{Y}_n(\Omega) = [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}-1} k\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n-1} = k) = \frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\mathbb{E}(\mathrm{Y}_{n-1}).}$$

Ainsi la suite $(\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n))_{n\geqslant 1}$ est bien une suite géométrique de raison $\dfrac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}$.

• On obtient donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1) \times \left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\right)^{n-1}.$$

Mais on a montré à la question 1 que la variable aléatoire réelle Y_1 est la variable aléatoire réelle certaine égale à $\mathrm{N}-1$. Ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1) = \mathrm{N}-1$. On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = (\mathrm{N}-1) \times \left(\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{N}}\right)^{n-1}.}$$

Solution (exercice 18) Énoncé

1. Les évènements $(\{\mathrm{X}_i = 0\}, \{\mathrm{X}_i = 1\})$ forment le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire réelle de Bernoulli X_i. D'après le protocole, on a : $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{\{\mathrm{X}_i=0\}}$ et $\mathbb{P}_{\{\mathrm{X}_i=1\}}$ existent bien. On obtient en utilisant la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{X}_{i+1} = 1) &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0)\mathbb{P}_{\mathrm{X}_i=0}(\mathrm{X}_{i+1} = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1)\mathbb{P}_{\mathrm{X}_i=1}(\mathrm{X}_{i+1} = 1)\\
&= \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1).
\end{aligned}$$

Comme de plus $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1)$, on obtient que :

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{X}_{i+1} = 1) = 1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1).}$$

2. • Pour tout $i \in [\![1, 365]\!]$, on a : $\mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p_i)$ avec $p_i = \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1)$. Ainsi pour connaître la loi de X_i, il suffit de connaître p_i à savoir de calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 1)$.

• Calcul de p_i. La question précédente donne que : $\forall i \in [\![1, 365]\!],\quad p_{i+1} = 1 - \dfrac{1}{2}p_i$.

On reconnaît ainsi une suite arithmético-géométrique. On ne détaille pas les calculs mais on obtient au final :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, 365]\!],\quad p_i = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}.}$$

• Ainsi, on a : $\boxed{\forall i \in [\![1, 365]\!],\quad \mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right).}$

3. On remarque que : $\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{365} \mathrm{X}_i$. Ainsi par linéarité de l'espérance, on obtient que : $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(\mathrm{X}_i)$. De plus comme $\mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right)$, on a : $\mathbb{E}(\mathrm{X}_i) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{X}) &= \sum_{i=1}^{365}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \frac{2}{3}\right]\\
&= \frac{-2}{3}\sum_{i=1}^{365}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i} + \frac{2}{3} \times 365\\
&= \boxed{\frac{2}{9}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{365}\right) + \frac{730}{3}.}
\end{aligned}$$

Solution (exercice 19) Énoncé

1.

1.1)

```python
import random as rd
def Simu_X(n, p):
    X = 0
```

```python
    for _ in range(1, n+1):
        if rd.random() < p:
            X += 1
        else:
            X = 0
    return X
>>> Simu_X(30, 0.5)
0
```

1.2) Une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$ est donnée par la loi des grands nombres, on fait une moyenne de beaucoup de simulations de X_n.

```python
N = 10**3 # arbitrairement grand
S = 0
for _ in range(N):
    S += Simu_X(100, 0.5)
>>> S/N     # approximation de l'espérance de X10 pour \
↪ proba 1/2
1.038
```

2. On a $\boxed{X_1 \mathscr{B}(p)}$. De plus, $\boxed{X_n(\Omega) = \{0, \ldots, n\}}$, puisque dans le pire des cas nous aurons avancé de 1 à chaque fois.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Si on se trouve à la position $k \geqslant 1$ au temps n, c'est qu'avant on se trouvait à la position $k-1$. Donc

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = k, X_{n-1} = k-1) = \mathbb{P}_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k)\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1),$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = p\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)}.$$

4. Constatons tout d'abord que X_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, une variable aléatoire finie. Donc

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k),$$

donc d'après la question précédente

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} kp\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) = p\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) = p\sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)\mathbb{P}(X_{n-1} = \ell).$$

On reconnaît alors l'espérance de X_{n-1} puisque $X_{n-1}(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbb{E}(X_n) = p\mathbb{E}(X_{n-1}).$$

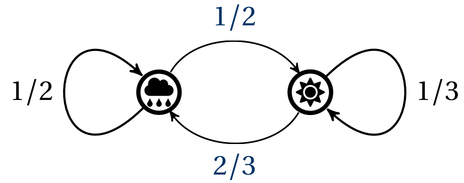
5. Puisqu'on a une suite géométrique, on déduit l'expression en fonction de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathbb{E}(X_n) = p^{n-1}\mathbb{E}(X_1) = p^{n-1}p = p^n.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \begin{cases} p^n & \text{si } n \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Solution (exercice 20) Énoncé On peut représenter la situation de la manière suivante.



1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(\{X_n = B\}, \{X_n = M\})$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = B) &= \mathbb{P}_{X_n=B}(X_{n+1} = B)\mathbb{P}(X_n = B) + \mathbb{P}_{X_n=M}(X_{n+1} = B)\mathbb{P}(X_n = M) \\
&= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\mathbb{P}(X_n = B) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = M), \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = M) &= \mathbb{P}_{X_n=B}(X_{n+1} = M)\mathbb{P}(X_n = B) + \mathbb{P}_{X_n=M}(X_{n+1} = M)\mathbb{P}(X_n = M) \\
&= \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = B) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = M).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = MZ_n \text{ avec } \boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

2. Après calculs, on voit que $P^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{(défi.)}}{=} D$. On a donc en résumé :

$$\boxed{M = PDP^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

3.

```python
import random as rd

def simu_temps(n, temps_initial):
    """
    1 : beau temps
    0 : mauvais temps
    retourne une simulation du temps au bout de n jours
    """
```

```python
    temps = temps_initial
    for _ in range(2, n+1):
        if temps == 1:
            if rd.random() < 2/3:
                temps = 0
        else:
            # il faisait donc moche
            if rd.random() < 1/2:
                temps = 1
    return temps
```

Affichons par exemple 10 essais pour le jour 200.

```python
>>> L = [simu_temps(200, 1) for _ in range(100)]
>>> len([temps for temps in L if temps == 1]) # nb beau \
↪ temps
40
>>> len([temps for temps in L if temps == 0]) # nb mauvais \
↪ temps
60
```

On constate une plus forte probabilité de mauvais temps, on conjecture alors :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = B) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = M).}$$

4. Est-ce conforme à l'intuition ? Oui, puisque la probabilité conditionnelle $2/3$ est élevée. Posons

$$Y_n = P^{-1}Z_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= P^{-1}Z_{n+1} \\ &= P^{-1}PDP^{-1}Z_n \\ &= DY_n. \end{aligned}$$

Donc notons $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ avec $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{6}a_n,\ b_{n+1} = b_n,$$

donc comme $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b_1.$$

Or,

$$Z_n = PY_n = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 \\ 4b_1 \end{pmatrix}.$$

Or $Y_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_1 = B) \\ \mathbb{P}(X_1 = M) \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_1 = B) \\ \mathbb{P}(X_1 = M) \end{pmatrix},$$

donc en analysant la deuxième ligne du produit matriciel, on obtient :

$$b_1 = \frac{1}{7}(\mathbb{P}(X_1 = B) + \mathbb{P}(X_1 = M)) = \frac{1}{7}.$$

D'où

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = \frac{3}{7}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = M) = \frac{4}{7}}.$$

Solution (exercice 21) Énoncé

1. Puisque la première fois il choisit un tunnel au hasard X_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{A, B, C\}$ donc $\boxed{Z_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors puisque $(X_n = A, X_n = B, X_n = C)$ est un système complet d'évènements, on déduit par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = A) &= \mathbb{P}_{X_n=A}(X_{n+1} = A)\mathbb{P}(X_n = A) + \mathbb{P}_{X_n=B}(X_{n+1} = A)\mathbb{P}(X_n = B) \\ &\quad + \mathbb{P}_{X_n=C}(X_{n+1} = A)\mathbb{P}(X_n = C) \\ &= 0\mathbb{P}(X_n = A) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = B) + 0\mathbb{P}(X_n = C), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = B) &= \mathbb{P}_{X_n=A}(X_{n+1} = B)\mathbb{P}(X_n = A) + \mathbb{P}_{X_n=B}(X_{n+1} = B)\mathbb{P}(X_n = B) \\ &\quad + \mathbb{P}_{X_n=C}(X_{n+1} = B)\mathbb{P}(X_n = C) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = A) + 0\mathbb{P}(X_n = B) + 0\mathbb{P}(X_n = C), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = C) &= \mathbb{P}_{X_n=A}(X_{n+1} = C)\mathbb{P}(X_n = A) + \mathbb{P}_{X_n=B}(X_{n+1} = C)\mathbb{P}(X_n = B) \\ &\quad + \mathbb{P}_{X_n=C}(X_{n+1} = C)\mathbb{P}(X_n = C) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = A) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = B) + 1\mathbb{P}(X_n = C). \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad Z_{n+1} = MZ_n, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$

3. En calculant $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie que :

$$\boxed{M = PDP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $Y_n = P^{-1}X_n$. Alors

$$Y_{n+1} = P^{-1}PDP^{-1}X_n = D\left(P^{-1}X_n\right) = DY_n.$$

Donc $\boxed{Y_{n+1} = DY_n.}$

5. Notons $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, alors la question précédente livre que (a_n) (*resp.* $(b_n), (c_n)$) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ (*resp.* $\dfrac{1}{2}, 1$). Donc :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c_1.$$

Dans la suite, le symbole « tend vers » pour des matrices correspondra à des limites coefficient par coefficient. On a

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Donc puisque P est une matrice constante,

$$X_n = PY_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $c_1 = 1$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = A) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = B) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = C) = 1}.$$

Est-ce conforme à l'intuition? Oui, puisqu'une fois le bon tunnel choisi (le C), on ne se trompe plus. *En language chaîne de* M*ARKOV, on parle de tunnel « absorbant »*