Programme de colles

du 20 au 24/5/2024

- Cette semaine de rentrée : 1 question de cours en Maths.
- Uniquement des questions de cours sur les variables aléatoires, le cours est encore tout frais et le TD peu démarré.

1. [MATHS] DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

- **Relation petit o.** Définition, propriétés, lien avec l'équivalence.
- **Développement limité.** Définition en un point finie, et en $\pm\infty$. Unicité du développement limité, et parité/imparité. Développements limités usuels : géométrique, formule de Taylor-Young (conséquences : cos, sin, exp *etc.*)
- **Opérations sur les développements limités.** Troncature, combinaison linéaire, produit, composée, quotient (conséquence : développement limité à l'ordre 5 de la tangente). Primitivation. Ramener des problèmes de développement limité au voisinage de zéro à l'aide d'un changement de variable (*i.e.* en définissant une fonction auxiliaire).
- **Application des développements limités.** Recherche d'équivalents, étude locale d'une fonction (régularité en un point par existence d'un développement limité, équation de la tangente et position relative locale). Prolonger une fonction par continuité en un point à l'aide d'un développement limité, dérivabilité en cas d'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Attention

L'étude des branches infinies n'est plus au programme de BCPST.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner le lien entre la relation « petit o » et l'équivalent $\sim$ pour les fonctions. Rappeler les équivalents usuels sur les fonctions exp et cos. En déduire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de exp et un $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos.
2. Rappeler les développements limités de $\cos, \sin$ du cours. Montrer, selon deux méthodes, que $(\cos, \sin)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *(1ère : celle du chapitre sur les espaces vectoriels, en évaluant en plusieurs x — 2ème : en utilisant les* $\mathrm{DL}_1(0)$ *de* cos *et* sin *et la propriété d'unicité du développement limité)*
3. Citer la formule de Taylor-Young. L'appliquer pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp, et le $\mathrm{DL}_2(1)$ de exp.
4. Définir la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, et rappeler le graphe d'arctan. Citer les trois conditions sur $\mathrm{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour qu'elle soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X. Vérifier ces conditions sur G définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{G}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$.
5. Soient $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2$ les résultats de 2 lancers de dés à 6 faces et non pipés, supposés indépendants. Déterminer la loi de U définie comme le plus grand des lancers, en commençant par calculer $\mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant k), k \in [\![1, 6]\!]$.
6. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}})$ pour tout évènement A.
7. Citer le théorème de transfert, puis établir que : $|\mathbb{E}(\mathrm{X})| \leqslant \mathbb{E}(|\mathrm{X}|)$ pour toute variable aléatoire finie X.
8. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Citer la formule de König-Huygens et la démontrer.
9. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Donner l'expression de la centrée-réduite $\mathrm{X}^\star$ de X, et démontrer qu'elle est effectivement centrée/réduite.

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les variables aléatoires.