Chapitre # (ALG) 11 Applications linéaires

Le premier mathématicien à avoir eu l'idée d'utiliser des coordonnées pour faire de la géométrie est René DESCARTES, *faisant ainsi le lien entre algèbre et géométrie.*

— Le saviez-vous ?

Résumé & Plan

Nous avons étudié dans le Chapitre (ALG) 11 les espaces vectoriels, maintenant nous allons considérer des applications entre les espaces vectoriels que nous appellerons *applications linéaires* qui sera une abstraction de nombreuses applications classiques déjà connues.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir $\mathbb{K}$ sont vrais que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation Ensemble des applications

Soient E, F deux ensembles. On notera E^F (ou $\mathscr{F}(F,E)$) l'ensemble des applications de F dans E.

Exemple 1

- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (*resp.* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) désigne l'ensemble des suites à valeurs complexes (*resp.* à valeurs réelles).
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les espaces vectoriels sont en particulier des ensembles, on peut donc tout à fait considérer des applications entre eux. Mais pour pouvoir faire des calculs tenant compte des opérations présentes sur chaque espace vectoriel, il faut compléter légèrement la définition en s'inspirant des notions de « linéarité » que nous connaissons déjà.

- Dans le Chapitre (ALG) 4, et avec les mêmes notations, nous avions justifié que la somme était linéaire :
$$\text{« } \sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \mu \sum_{k=p}^{n} b_k \text{ ».}$$
- Dans le Chapitre (AN) 2, et avec les mêmes notations, nous avions justifié que l'intégration était linéaire :
$$\text{« } \int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g \text{ ».}$$
- Dans le Chapitre (AN) 1, et avec les mêmes notations, nous avions justifié que la dérivation de fonctions (et même des polynômes depuis le Chapitre (ALG) 10) était linéaire :
$$\text{« } (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'. \text{ ».}$$

Toutes ces propriétés disent la même chose : l'application en question (la somme, l'intégrale, la dérivée *etc.*) transforment les combinaisons linéaires en combinaisons linéaires. Voyons à présent la définition générale.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions & premières propriétés

Définition 1 | Application linéaire
Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de* E *dans* F (parfois aussi *morphisme linéaire*) toute application $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

- Lorsque $u(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$, *i.e.* pour tout $x \in \mathrm{E}$, $u(x) \in \mathrm{E}$, on dit que u est un *endomorphisme*.
- Si $\mathrm{F} = \mathbb{K}$ alors on dit que u est une *forme linéaire* sur E.

Attention
Attention aux confusions de vocabulaire avec les espaces vectoriels : on ne dit surtout pas « u est stable par combinaison linéaire », mais « u transforme les combinaisons linéaires en combinaisons linéaires ».

Remarque 1
- Le mot « endomorphisme » provient du grec « endon » qui signifie « à l'intérieur », que vous connaissez déjà des S.V.T. *via* le qualificatif « endogène ».
- De façon équivalente, on a :

$$u \text{ linéaire} \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad u(x+y) = u(x) + u(y), \\ \textbf{(ii)} & \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathrm{E}, \quad u(\lambda x) = \lambda u(x). \end{cases}$$

(on peut le montrer en deux temps)

$$\iff \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

(on peut se passer d'un scalaire)

$$\iff \forall n \geqslant 1,\ (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{E}^n,\ (\lambda_1,\dots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,$$
$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i).$$

(on peut le montrer pour n vecteurs)

Cette série d'équivalences est laissée en exercice. Nous utiliserons en pratique la définition afin de montrer qu'une application linéaire.

Notation
- $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- On note parfois $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K}) = \mathbb{E}^\star$ l'ensemble des formes linéaires, cet ensemble est appelé *espace dual* de E.

Commençons par quelques premiers exemples.

Exemple 2 (avec des uplets)

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z, 2x+3y-5z, x+y+z) \end{array} \right.$ est linéaire.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier. $\pi_i \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est, pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ appelée *i-ème projection canonique.*

3. **[Moyenne]** Soit $n \geqslant 1$ un entier, $\mathrm{M}_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple 3 **(Avec des matrices)** L'application $g \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est linéaire.

Exemple 4 **(Avec des polynômes, suites, ...)** Les applications suivantes sont linéaires.

1. $\mathrm{D} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}^2+1) \end{array} \right.$

2. $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$

3. $\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ f & \longmapsto & (f(0), f(1), f(2)). \end{array} \right.$

4. $\delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array} \right.$

Définition/Proposition 1 | Applications linéaires usuelles

Si E, F sont deux espaces vectoriels. Alors :

- $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & 0_\mathrm{F} \end{array} \right.$ s'appelle *l'application linéaire nulle.*
- $\mathrm{Id}_\mathrm{E} \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E, appelé *endomorphisme identité* (ou *endomorphisme identique*).
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est un endomorphisme de E appelé *homothétie* de *rapport* λ.

Preuve Montrons le uniquement pour l'application nulle et les homothéties $\lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Le cas de l'identité s'obtient alors en prenant $\lambda = 1$.

-
-

Proposition 1 | Image du neutre « $0_\mathrm{E} \to 0_\mathrm{F}$ »

Soient $(\mathrm{E},+,\cdot)$ et $(\mathrm{F},+,\cdot)$ deux espaces vectoriels et $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application *linéaire*. Alors : $u(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Preuve Faire simplement $\lambda = \mu = 0$ et $x = y = 0_\mathrm{E}$ dans la définition d'une application linéaire.

Méthode — Montrer qu'une application n'est pas linéaire

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, on peut :

- étudier l'égalité $u(0_E) = 0_F$.
- **ou** chercher s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ tels que :
  $u(\lambda x + \mu y) \neq \lambda u(x) + \mu u(y)$.

Exemple 5 (Contre...) Les applications suivantes ne sont **pas** linéaires. *(les termes surlignés sont les termes empêchant la linéarité)*

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z+1, z). \end{array} \right.$

2. $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y+z. \end{array} \right.$

1.2. Opérations

Définition/Proposition 2 | Opérations sur les applications linéaires

Soient E, F et G des espaces vectoriels.

1. **[Combinaison linéaire]** Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $u, v : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors on définit :
$$u+v \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x)+v(x), \end{array} \right. \qquad \lambda u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda u(x), \end{array} \right.$$
et plus généralement : $\lambda u + \mu v \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda u(x)+\mu v(x). \end{array} \right.$
Alors $\lambda u + \mu v \in \mathscr{L}(E,F)$, et $(\mathscr{L}(E,F), +, \cdot)$ est un espace vectoriel, d'élément neutre l'application linéaire nulle.
2. **[Composition]** Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors : $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.
3. **[Restriction]** Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors l'application $u|_V \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$ est appelée *application restreinte de u à* V. C'est une application linéaire de V dans F.

Remarque 2 Nous avions déjà rencontré les opérations de composition, restriction dans le Chapitre (ALG) 6 de généralités sur les applications. L'apport de cet énoncé est simplement la linéarité. On ajoute aussi ici la notion de combinaison linéaire d'application.

Preuve

1.

2.

3. Évident, restreindre simplement à l'ensemble V la définition de la linéarité de u : plus précisément
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$
$$\Longrightarrow \forall (x,y) \in V^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

Attention

Même si $u|_V$ et u « coïncident » sur V, en tant qu'application elles sont différentes (puisque leur espace de départ n'est pas le même).

Exemple 6 On considère les applications :

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array} \right.$$

Calculons $u \circ v$ et $v \circ u$. Que constate-t-on ?

Proposition 2 | Distributivité de la composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
$$(\lambda v) \circ u = \lambda(v \circ u) = v \circ (\lambda u).$$
2. Soient $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors :
$$v \circ (u_1 + u_2) = (v \circ u_1) + (v \circ u_2).$$
3. Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, alors :
$$(v_1 + v_2) \circ u = (v_1 \circ u) + (v_2 \circ u).$$

La preuve est une simple vérification et est laissée en exercice.

Remarque 3

- C'est à cause de ces propriétés que parfois le symbole « $\circ$ » est omis pour les composées d'applications linéaires et est notée comme un produit classique : pour ces applications, $+, \circ$ se manipulent comme $+, \times$. Ainsi, on note parfois dans certaines références (mais j'éviterai de le faire) :
$$v(u_1 + u_2) = vu_1 + vu_2, \qquad (v_1 + v_2)u = v_1 u + v_2 u.$$
- Bien entendu, la proposition précédente est complètement fausse pour les applications non linéaires.

PUISSANCES & NILPOTENCE. On se place désormais dans le cas d'endomorphismes, *i.e.* lorsque E = F.

Définition 2 | Puissances

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors on définit par récurrence l'endomorphisme f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f^0 & = & \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \\ f^{k+1} & = & f \circ f^k = f^k \circ f, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

En d'autres termes : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}.$

Remarque 4 On suppose que f est un **endo**morphisme, tout simplement pour que les composées aient un sens. On pourrait faire sans cette hypothèse et supposer plus généralement que $f(\mathrm{E}) \subset \mathrm{F}$ si $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$.

La définition de nilpotence est parfaitement analogue à celle vue pour les matrices (Chapitre (ALG) 8).

Définition 3 | Endomorphisme nilpotent

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Alors :

- f est dite *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
- Dans ce cas, l'*indice de nilpotence* est le plus petit exposant k vérifiant :
$$f^k = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

Exemple 7

1. On considère à nouveau
$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x). \end{array} \right.$$
Calculer les puissances de u. Qu'en déduire sur u ?

2. On considère
$$\mathrm{T} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1). \end{array} \right.$$
Calculer les puissances de T. *(On conjecture une expression, que l'on prouvera par récurrence.)*

Montrons la par récurrence.

Proposition 3 | Propriétés de la puissance

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$f^p \circ f^q = f^{p+q}, \quad (f^p)^q = f^{pq}.$$

Attention

En revanche, en règle générale :

$$(f \circ g)^p \neq f^p \circ g^p,$$

sauf si les endomorphismes f et g commutent.

Théorème 1 | Binôme de Newton pour les endomorphismes

Soient E un espace vectoriel, f, g deux endomorphismes de E **qui commutent**, c'est-à-dire tels que : $f \circ g = g \circ f$. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k}.$$

Attention

L'hypothèse de commutativité est cruciale, comme pour les matrices.

La preuve est strictement la même que pour les réelles, complexes et matrices.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur p**)*

Montrons par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k g^{p-k}.$$

Initialisation. On a $(f+g)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^k g^{0-k} = \binom{0}{0} f^0 g^0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(f+g)^{n+1} &= (f+g) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} && \textit{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{k+1} g^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g f^k g^{n-k} && \textit{f, g commutent}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{k+1} g^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n+1-k} && i = k+1\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f^i g^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n+1-k}\\
&= \binom{n}{n} f^{n+1} g^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} f^i g^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n+1-k} + \binom{n}{0} f^0 g^{n+1-0}\\
&= f^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^k g^{n+1-k} + g^{n+1} && \textit{formule de Pascal}\\
&= f^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^k g^{n+1-k} + g^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^k g^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

2. INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ & BIJECTIVITÉ

La notion d'image d'application a déjà été rencontrée dans le Chapitre (ALG) 6, elle est donc toujours en vigueur pour des applications en particulier linéaires, et fortement reliée à la surjectivité. Nous allons voir que l'injectivité peut dans le cas d'applications linéaires être reformulée à l'aide de ce que nous appellerons le *noyau*. Mais bien entendu il est toujours possible de recourir à la définition basique vue au début de l'année : c'est-à-dire qu'*une application* $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *entre deux ensembles* E *et* F *est injective si :* $\forall (x,x') \in \mathrm{E}^2, \quad u(x) = u(x') \implies x = x'$.

2.1. Image & Noyau

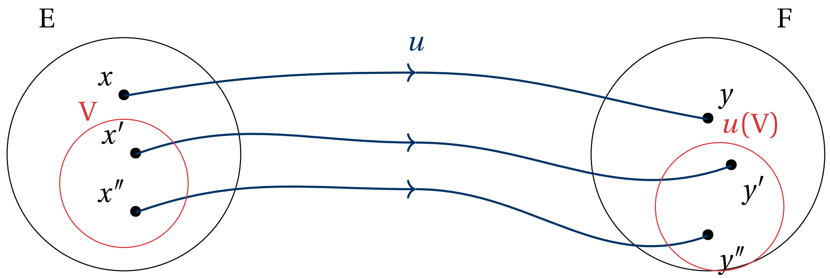
Définition/Proposition 3 | Image directe d'un espace vectoriel

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors :

$$u(\mathrm{V}) = \{u(x) \mid x \in \mathrm{V}\}, \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, u \underset{\textbf{(défi.)}}{=} u(\mathrm{E}) = \{u(x) \mid x \in \mathrm{E}\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de F. *(donc de l'espace d'**arrivée**!)*

- $u(\mathrm{V})$ est l'image directe de V par u, c'est le sous-espace vectoriel **de** F constitué des vecteurs qui sont l'image d'un vecteur de V par u. On a de plus :
$$y \in u(\mathrm{V}) \iff \exists x \in \mathrm{V}, \quad y = u(x).$$
- $\operatorname{Im} u = u(\mathrm{E})$ est appelée *image de* u, c'est le sous-espace vectoriel **de** F constitué des vecteurs qui sont l'image d'un vecteur de E par u. On a de plus :
$$y \in \operatorname{Im} u \iff \exists x \in \mathrm{E}, \quad y = u(x).$$



$u(\mathrm{V}) = \{y', y''\}$

Preuve Montrons que $u(\mathrm{V})$ est un sous-espace vectoriel de F. Pour $\operatorname{Im} u = u(\mathrm{E})$ il suffira de choisir $\mathrm{V} = \mathrm{E}$.

- 🖋
- 🖋
- 🖋

Attention

La linéarité est cruciale dans l'énoncé précédent. Par exemple,

- $u : x \in \mathbb{R} \longrightarrow 1 + x$ n'est pas une application linéaire (zéro n'est pas envoyé sur zéro),
- et $u(\{0\}) = \{1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ puisqu'il ne contient pas zéro.

Passons maintenant à la définition du noyau. Reprenons la définition de l'injectivité de $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ rappelée plus haut :
$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, \quad u(x) = u(x') \implies x = x'$$
$$\iff \forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, \quad u(x - x') = 0_{\mathrm{F}} \implies x - x' = 0_{\mathrm{E}}.$$
u linéaire

Par conséquent, une application injective linéaire vérifie (en posant $x' = 0$ dans la définition précédente) :
$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad u(x) = 0_{\mathrm{F}} \implies x = 0_{\mathrm{E}}.$$
Autrement dit, le seul vecteur qui a pour image le vecteur nul, est le vecteur nul. Cela nous incite alors à considérer l'ensemble des vecteurs qui s'envoient sur 0_{F} : nous appellerons cet ensemble le *noyau* de u.

Définition/Proposition 4 | Noyau

- On appelle *noyau* de u, et on le note $\operatorname{Ker} u$, l'ensemble :
$$\operatorname{Ker} u = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = 0_{\mathrm{F}}\}. \quad \text{Ainsi : } x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_{\mathrm{F}}.$$
- C'est le sous-espace vectoriel **de** E constitué des vecteurs ayant 0_{F} pour image par u.

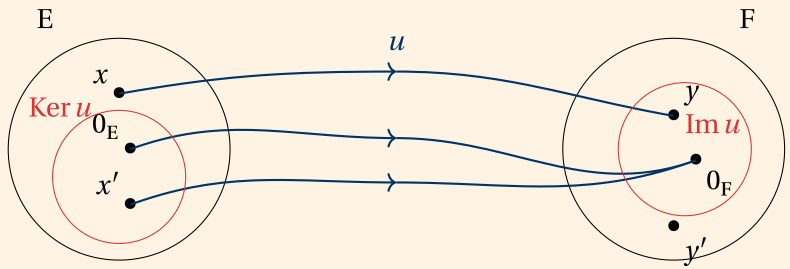
Preuve Montrons que $\operatorname{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E.

- 🖋
- 🖋
- 🖋

Résumé **Qui est dans quoi ?**

On retient donc :

- le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de **départ**,
- l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'**arrivée**.



Sur cet exemple : $\operatorname{Ker} u = \{0_E, x'\}$, $\operatorname{Im} u = \{0_F, y\}$

Proposition 4 | Lien avec l'injectivité/surjectivité

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

- u est injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\} \iff \dim \operatorname{Ker} u = 0$
- u est surjective $\iff \operatorname{Im} u = F \underset{(\text{si} \dim F < \infty)}{\iff} \operatorname{Rg} u = \dim F$.

Preuve La dernière partie de chaque équivalence est immédiate en utilisant la propriété sur l'inclusion d'espaces vectoriels et la dimension vue au Chapitre (ALG) 11 : un espace vectoriel est nul si et seulement s'il est de dimension nul. On se contente donc d'établir la 1ère à chaque fois.

- $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons u injective. Montrons que $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
  $\boxed{\supset}$ On a $0_E \in \operatorname{Ker} u$ puisque $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E.
  $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = 0_F = u(0_E)$. Or u est injective donc $x = 0_E$.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$, et soit $(x, x') \in E^2$ tel que $u(x) = u(x')$. Alors $u(x) - u(x') = 0_F = u(x - x')$ par linéarité de u. Autrement dit, $x - x' \in \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ donc $x - x' = 0_E$ et $x = x'$. L'application u est donc injective.
- La surjectivité a déjà été établie dans le Chapitre (ALG) 6 sur les applications : rien de nouveau ici.

Attention

Notez bien que dans la preuve précédente, la linéarité fut **fondamentale** pour écrire pour tous $x, x' \in E$:

$$u(x) = u(x') \iff u(x - x') = 0_F \iff x - x' \in \operatorname{Ker} u.$$

Pas question donc de calculer des noyaux pour montrer qu'une application **NON** linéaire est injective. Par exemple, il est clair que $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas injective et pourtant son « noyau » serait réduit à zéro ($x^2 = 0 \iff x = 0$).

Exemple 8 Déterminer le noyau et l'image des applications suivantes. *(nous avions déjà établi leur linéarité)*

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + z, 2x + 3y - 5z, x + y + z). \end{array} \right.$

- **[Noyau]** On détermine l'ensemble des vecteurs d'image $0_{\mathbb{R}^3}$.

- **[Image]** On détermine ici l'ensemble des vecteurs de l'espace d'arrivée ayant au moins un antécédent.

2. $g \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}. \end{array} \right.$

- **[Noyau]**

- **[Image]**

Exemple 9 **(Applications usuelles)** Soient E et F des espaces vectoriels. Alors, on a :
- $\mathrm{Im}\left(0_{\mathscr{L}(E,F)}\right) = \{0_F\}$, $\mathrm{Ker}\left(0_{\mathscr{L}(E,F)}\right) = E$.

- $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E) = E$, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

Avant d'aborder un certain nombre d'exemples, on termine ces résultats par une proposition très utile en pratique : elle nous permettra de trouver facilement une base de l'image.

Proposition 5 | Image directe d'un « Vect »

Soient E et F des espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :
$$u\left(\mathrm{Vect}\,(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) = \mathrm{Vect}\,(u(x_k))_{1\leqslant k\leqslant n}\,.$$
En particulier, si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille génératrice finie de E, alors :
- $(u(x_1),\dots,u(x_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,u$, c'est-à-dire :
$$\mathrm{Vect}(u(x_1),\dots,u(x_n)) = \mathrm{Im}\,u.$$
C'est en particulier le cas si $(x_1,\dots,x_n)$ est une base.
- Par conséquent, $\mathrm{Im}\,u$ est de dimension finie.

Attention

Même si $(x_1,\dots,x_n)$ est une base, rien ne garantit que l'image soit encore une base, elle est seulement génératrice. Pour avoir une base, nous verrons plus tard qu'il est suffisant que u soit bijective.

Preuve *(Point clef — **Exploiter la linéarité de** u)*
Soit $y \in F$. Alors :
$$y \in u\left(\mathrm{Vect}\,(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) \iff \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad y = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$$
$$\underset{\text{linéarité de } u}{\iff} \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad y = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i)$$
$$\iff y \in \mathrm{Vect}\,(u(x_k))_{1\leqslant k\leqslant n}\,.$$
On a ainsi montré que : $u\left(\mathrm{Vect}\,(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\right) = \mathrm{Vect}\,(u(x_k))_{1\leqslant k\leqslant n}$.

Exemple 10 Déterminer une base de l'image de f définie dans l'Exemple 8.
- On commence par en trouver une famille génératrice avec la proposition précédente.

- La famille trouvée est-elle une base de l'image ?

2.2. Isomorphismes

Définition 4 | Isomorphisme, Automorphisme

- On appelle *isomorphisme* entre deux espaces vectoriels E et F toute application linéaire bijective de E dans F, dans ce cas on dit que E et F sont isomorphes.
- On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E, c'est donc un isomorphisme de E dans E.

Définition 5 | Groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$

Soit E un espace vectoriel, l'ensemble des automorphismes linéaires de E est noté $\mathrm{GL}(E)$, et appelé *groupe linéaire sur* E.

morphisme	=	application linéaire				
ENDOmorphisme	=	application linéaire	+	ENTRE MÊMES ESPACES		
ISOmorphisme	=	application linéaire	+	BIJECTIVE		
AUTOmorphisme	=	application linéaire	+	BIJECTIVE	+	ENTRE MÊMES ESPACES

Une application bijective $u : E \longrightarrow F$ (*i.e.* injective et surjective de E dans F) possède (voir Chapitre (ALG) 6) une application inverse $u^{-1} : F \longrightarrow F$, *i.e.* satisfaisant :

$$u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_F, \quad u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E .$$

Exemple 11 Justifier que f définie dans l'Exemple 8 est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$, et déterminer f^{-1}.

On montre à présent que u^{-1} est de manière générale toujours linéaire.

Proposition 6 | Linéarité de l'inverse

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Si u est un isomorphisme, alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$ est un isomorphisme.

Preuve Il suffit de montrer que u^{-1} est linéaire elle aussi. En effet, soient $y, y' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$\begin{aligned} &u^{-1}(\lambda y + \mu y') \\ &= u^{-1}(\lambda u(u^{-1}(y)) + \mu u(u^{-1}(y'))) && u^{-1} \circ u = \mathrm{Id} \\ &= u^{-1} \circ u(\lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y')) && u \text{ linéaire} \\ &= \lambda u^{-1}(y) + \mu u^{-1}(y'). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité prouve bien la linéarité de u^{-1}.

Proposition 7 | Composée d'isomorphismes = isomorphisme

Soient $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ deux isomorphismes d'espaces vectoriels. Alors :

- $v \circ u$ est un isomorphisme de E dans G,
- et : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Note — *Attention, l'ordre est inversé, comme pour la formule analogue aux matrices.*

Preuve On a déjà vu que la composée d'applications linéaires est linéaire, et la formule de l'inverse d'une composée a été prouvée dans le Chapitre (ALG) 6.

Corollaire 1 | Puissance d'inverse

Soit $u : E \longrightarrow E$ un automorphisme d'un espace vectoriel. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (u^k)^{-1} = (u^{-1})^k .$$

Preuve Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On montre d'abord que : $u^k \circ (u^{-1})^k = \mathrm{Id}_E$.
- On montre ensuite que : $(u^{-1})^k \circ u^k = \mathrm{Id}_E$.

On a donc prouvé : $(u^k)^{-1} = (u^{-1})^k$.

2.3. Cas particulier de la dimension finie

2.3.1. Nature d'une base image

Théorème 2 | Image d'une base

Soient :

- E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n et de **base** $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$,
- F un espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors les natures de u et de la famille $u(\mathscr{B})$ sont reliées ainsi :

$$u \text{ est injective } \underset{\text{(i)}}{\iff} u(\mathscr{B}) \text{ est une famille libre de F}$$

$$u \text{ est surjective } \underset{\text{(ii)}}{\iff} u(\mathscr{B}) \text{ est une famille génératrice de F}$$

$$u \text{ est un isomorphisme } \underset{\text{(iii)}}{\iff} u(\mathscr{B}) \text{ est une base de F}$$

Preuve L'équivalence **(iii)** est immédiate en combinant **(i)** et **(ii)**.

- Montrons **(i)**.

u est injective

$$\iff (\forall x \in E, \quad u(x) = 0_F \iff x = 0_E)$$

$$\iff \left(\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}, \quad u\left(\sum_{i=1}^n \mu_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i u(e_i) = 0_F \iff \sum_{i=1}^n \mu_i e_i = 0_E\right) \quad \mathscr{B} \text{ est génératrice}$$

$$\iff \left(\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i u(e_i) = 0_F \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mu_i = 0\right) \quad \mathscr{B} \text{ est libre}$$

$$\iff u(\mathscr{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est libre.}$$

- Montrons **(ii)**.

u est surjective

$$\iff (\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad u(x) = y)$$

$$\iff \left(\forall y \in F, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad y = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = y\right) \quad \mathscr{B} \text{ est génératrice}$$

$$\iff u(\mathscr{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est génératrice.}$$

Remarque 5 On voit dans la preuve ci-dessus que pour **(ii)**, seul le caractère générateur de $\mathscr{B}$ est utile.

Corollaire 2 | Dimension d'espaces vectoriels isomorphes

Soient E, F deux espaces vectoriels, et $u : E \longrightarrow F$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \dim E < \infty, \\ \textbf{(ii)} & u \text{ isomorphisme} \end{cases} \implies \dim F = \dim E.$$

Preuve

- Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $u(\mathscr{B}) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base de F puisque u est un isomorphisme. Ainsi, F est de dimension finie.
- Comme $\operatorname{Card} u(\mathscr{B}) = \operatorname{Card}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = n$, on a nécessairement $\dim F = n = \dim E$.

Théorème 3 | Construction d'une application linéaire à l'aide d'une base

Soient :

- E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n et de **base** $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$,
- F un espace vectoriel, et $\mathscr{F} = (f_1, ..., f_n)$ une famille **quelconque** de n vecteurs de F.

Alors :

- **[Existence/Unicité]** $\exists! \, u \in \mathscr{L}(E, F), \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i$.
- **[Expression analytique]** $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.

Remarque 6 Pour étudier le caractère injectif, surjectif, bijectif de u on peut ensuite étudier le caractère libre, générateur, base de la famille $\mathscr{F}$, d'après la Théorème 2.

Preuve

Existence. Soit $x \in E$, on souhaite définir $u(x)$. Pour cela, notons $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors posons :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i.$$

On a bien $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et u est linéaire puisque les applications coordonnées $x \in E \longrightarrow \lambda_i$ le sont pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ (déjà vu).

Unicité. Soient u, v deux applications telles que $u(e_i) = f_i = v(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $x \in E$, montrons que $u(x) = v(x)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. On obtient :

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) \overset{\text{hypothèse}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \overset{\text{hypothèse}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i v(e_i) \overset{\text{linéarité}}{=} v\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right).$$

Remarque 7 On a donc aussi démontré les faits suivants :

- deux applications linéaires qui sont égales sur les éléments d'une base, sont en fait égales sur tout l'espace vectoriel !

- Si une application linéaire s'annule sur une base alors c'est l'application nulle.

Méthode Construction d'applications linéaires à l'aide d'une base

À la question « construisez une application linéaire entre E et F », si vous connaissez une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, vous pouvez répondre :

$$\text{je pose} \quad u(e_1) = \text{Truc}_1 \in F, \quad \ldots, \quad \text{je pose} \quad u(e_n) = \text{Truc}_n,$$

en découlera alors automatiquement $u(x)$ pour tout $x \in E$ par linéarité.

Exemple 12 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (0, 1, 1)$ et $x_3 = (1, 0, 1)$. Nous avons déjà vu que $\mathscr{B} = (x_1, x_2, x_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note de plus $\mathscr{B}^{\text{can}} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Soit $x = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $x = (a, b, c)$ dans la base $\mathscr{B}$.

2. En déduire une expression analytique de l'unique application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ telle que $u(x_i) = X^{i-1}$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$. Que dire, sans calcul, sur u ?

2.3.2. Rang

Définition 6 | Rang d'une application linéaire

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On dit que u est *de rang fini* si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.
- On appelle alors *rang de* u, et on note $\operatorname{Rg}(u)$, l'entier :

$$\operatorname{Rg}(u) = \dim(\operatorname{Im} u) = \dim(\{u(x) \mid x \in E\}).$$

La notion de rang décrite ici est fortement reliée à la notion de rang d'une famille de vecteurs définie précédemment. Le lien entre les deux apparaît avec le théorème suivant, qui pourra aussi s'écrire ultérieurement avec des matrices.

Théorème 4 | Lien entre les notions de rang

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, F un espace vectoriel de dimension quelconque, $\mathscr{G} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors u est de rang fini et :

$$\underbrace{\operatorname{Rg}(u)}_{\text{« rang d'une application »}} = \underbrace{\operatorname{Rg}(u(\mathscr{G}))}_{\text{« rang d'une famille Chapitre (ALG) 11 »}} = \underbrace{\operatorname{Rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{G})))}_{\text{« rang d'une matrice Chapitre (ALG) 8 »}}.$$

Preuve

- Commençons par justifier que u est de rang fini. Puisque $\mathscr{G} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille génératrice de E, on a en utilisant la Proposition 5 :

$$E = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow u(E) = \operatorname{Vect}(u(x_1), \ldots, u(x_n)).$$

Ainsi, $u(\mathscr{G}) = (u(x_1), \ldots, u(x_n))$ est une famille génératrice finie de $u(E)$, donc $u(E)$ est bien de dimension finie.

- On a en plus en passant à la dimension : $\dim u(\mathrm{E}) = \dim u(\mathscr{G}) \iff \mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}(u(\mathscr{G}))$.

C'est terminé : l'égalité $\mathrm{Rg}(u(\mathscr{G})) = \mathrm{Rg}(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u(\mathscr{G}))$ ayant déjà été établie dans le Chapitre (ALG) 11.

Proposition 8 | Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

Soient E, E′, F et F′ des espaces vectoriels, $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ une application linéaire de rang fini, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}',\mathrm{E})$ et $w \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{F}')$ deux **isomorphismes**. Alors $v \circ u$ et $w \circ v$ sont de rang fini et : $\mathrm{Rg}(v) = \mathrm{Rg}(v \circ u) = \mathrm{Rg}(w \circ v)$.

En d'autres termes, le rang est invariant par composition avec un isomorphisme, ce que l'on peut retenir ainsi :

$$\mathrm{Rg}(v) = \mathrm{Rg}(v \circ \cancel{u}) = \mathrm{Rg}(\cancel{w} \circ v), \quad \text{si } u, w \text{ sont des isomorphismes.}$$

Preuve

- Justifions $\mathrm{Rg}(v) = \mathrm{Rg}(v \circ u)$, en montrant par double-inclusion que :
$$\{v(y) \mid y \in \mathrm{E}\} = \{v(u(x)) \mid x \in \mathrm{E}'\}. \quad (\star)$$
$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \mathrm{E}$, montrons que $v(y) \in \{v(u(x)) \mid x \in \mathrm{E}'\}$. Alors puisque v est un isomorphisme il existe $x \in \mathrm{E}'$ tel que $y = u(x)$. Donc $v(y) = v(u(x')) \in \{v(u(x)) \mid x \in \mathrm{E}'\}$.
$\boxed{\supset}$ Immédiate puisque pour tout $x \in \mathrm{E}'$, $u(x) \in \mathrm{E}$.
En passant à la dimension dans $(\star)$, on obtient : $\mathrm{Rg}(v) = \mathrm{Rg}(v \circ u)$.
- On admet la deuxième égalité.

Le théorème qui suit, très utile en pratique, permet en pratique de trouver la dimension de l'image à partir de celle du noyau.

Théorème 5 | Théorème du rang

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel de dimension quelconque, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors u est de rang fini et :

$$\dim \mathrm{E} = \mathrm{Rg}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u.$$

Note | *Bien mettre la dimension de l'espace de **départ** dans le membre de droite.*

Preuve Notons $n = \dim \mathrm{E}$.

1. **[Complétion d'une base de $\mathrm{Ker}\, u$]** D'après le théorème de la base incomplète, notant $e_1, \dots, e_p$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$, il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ des éléments de E tels que $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. Notons par ailleurs $\mathrm{S} = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ l'espace vectoriel engendré pas les vecteurs qui complètent.
2. **[Il suffit de montrer que $v = u|_{\mathrm{S}} \in \mathscr{L}(\mathrm{S}, \mathrm{Im}\, u)$ est un isomorphisme]** En effet, si c'est le cas, on a alors $\dim \mathrm{S} = \dim \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Rg}\, u$, mais comme $\dim \mathrm{S} + \dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{E}$, le résultat s'en suivra.
   - Il est immédiat que $v = u|_{\mathrm{S}} \in \mathscr{L}(\mathrm{S}, \mathrm{Im}\, u)$, montrons donc le caractère bijectif. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, v$, *i.e.* $x \in \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{Ker}\, u$, or puisque $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de E, il existe un unique couple $(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{S}}) \in \mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{S}$ tel que $x = x_{\mathrm{K}} + x_{\mathrm{S}}$. Mais $x = x + 0$ et $x = 0 + x$ sont deux autres décompositions (puisque $x \in \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{Ker}\, u$) donc par unicité : $x_{\mathrm{K}} = 0 = x_{\mathrm{S}}$ donc $x = 0_{\mathrm{E}}$.
   - Reste à montrer la surjectivité. Soit $y \in \mathrm{Im}\, u$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $u(x) = y$, mais comme mentionné plus tôt il existe un unique couple $(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{S}}) \in \mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{S}$ tel que $x = x_{\mathrm{K}} + x_{\mathrm{S}}$, donc $u(x) = 0 + u(x_{\mathrm{S}})$, et finalement $u(x_{\mathrm{S}}) = y$ justifie l'existence d'un antécédent dans S pour y.

Exemple 13 (Application 1) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors : $\boxed{\mathrm{Rg}(u) \leqslant \min(\dim \mathrm{E}, \dim \mathrm{F}).}$
En d'autres termes : $\mathrm{Rg}(u) \leqslant \dim \mathrm{E}$ et $\mathrm{Rg}(u) \leqslant \dim \mathrm{F}$. On a donc deux majorations à établir.

-
-

Exemple 14 (Application 2, fondamentale : équivalence entre injectivité, surjectivité, bijectivité) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors :

$$\boxed{\textbf{(i) } u \text{ est bijective} \iff \textbf{(ii) } u \text{ est injective} \iff \textbf{(iii) } u \text{ est surjective.}}$$

D'après le théorème du rang, puisque E est de dimension finie, on a $\dim \mathrm{E} = \mathrm{Rg}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, u$. Montrons alors que **(ii)** $\iff$ **(iii)** (l'équivalence **(i)** $\iff$ **(ii)** s'en suivra alors sans difficulté).

Remarque 8 Le résultat de l'exemple précédent (statut d'exemple car non mentionné explicitement dans le programme) est d'importance capitale dans la pratique : il permet, pour les applications linéaires, de ramener l'étude de bijectivité à celle d'injectivité (souvent plus facile) ou de surjectivité.

Méthode **Montrer (plus efficacement) qu'une application est un isomorphisme**

Soit $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie tels que : $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.

1. On montre que f est injective, c'est-à-dire : $\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. On applique le théorème du rang :
$$\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{Rg} u \iff \dim \mathrm{F} = 0 + \operatorname{Rg} u$$
car u est injective et $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.
3. On obtient donc $\operatorname{Rg} u = \dim \mathrm{F}$, c'est-à-dire que u est surjective.

Le même raisonnement s'applique si on a d'abord montré la surjectivité (plus rare).

Méthode **Trouver une base de l'image et du noyau**

Soit $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire.

- *Pour le noyau :* on calcule explicitement l'ensemble puis on en cherche une base.
- *Pour l'image :* le calcul explicite est souvent non-trivial, on utilise donc la Proposition 5.
  1. On commence donc par chercher une famille génératrice $\mathscr{G}$ de l'ensemble de départ E.
  2. On calcule les images de chacun des vecteurs de $\mathscr{G}$, la famille $u(\mathscr{G})$ est alors génératrice de F.
  3. Si l'on souhaite une base, on cherche à extraire une sous-famille libre formée de $\operatorname{Rg} u$ vecteurs. Le rang se calcule facilement en exploitant le noyau et le théorème du rang. Pour éliminer les vecteurs du Vect, on peut par exemple échelonner la matrice de la famille pour deviner des combinaisons linéaires (voir le Chapitre (ALG) 11).

Passons à présent à des exemples de calculs de noyaux et d'images, en exploitant le théorème du rang lorsque l'espace de départ est bien de dimension finie.

Exemple 15 Pour les applications ci-dessous, déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$, en déterminer une base lorsqu'ils sont de dimension finie. *(on admettra les linéarités dans cet exemple, qui ne présentent pas de difficulté)*

1. $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y+2z). \end{array} \right.$
   - **[Base puis dimension du noyau]**
   - **[Théorème du rang]**
   - **[Base de l'image]**
2. $v \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, y, -x+y). \end{array} \right.$
   - **[Base puis dimension du noyau]**

- **[Théorème du rang]**

- **[Base de l'image]**

3. $\mathrm{T}\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1). \end{array}\right.$

- **[Base puis dimension du noyau]**

- **[Théorème du rang]**

- **[Base de l'image]**

4. $\mathrm{D}\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}\right.$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- **[Base puis dimension du noyau]**

- **[Théorème du rang]**

- **[Base de l'image]**

Exemple 16 **(Existence d'un polynôme interpolateur)** Soient un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille de $n+1$ réels distincts $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- L'application Φ : $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

- En déduire que pour toute famille de réels $(y_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0\,,\, n]\!], \quad P(x_k) = y_k$.

Remarque 9

- Si l'on veut rendre le raisonnement plus explicite, on introduira les *polynômes d'interpolation de* Lagrange. Ainsi, on peut vérifier que : $P = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$ convient, c'est-à-dire vérifie : $\Phi(P) = (y_0, \dots, y_n)$.
- Il y a donc un point de plus dans le nuage de points que le degré du polynôme qui l'interpole. Pensez à des exemples pour le retenir : il passe une unique droite (degré 1) sur 2 points, une unique parabole (degré 2) sur 3 points *etc.*

La première partie de la remarque nous conduit tout droit à la prochaine section : comment représenter les applications linéaires notamment par des matrices?

3. REPRÉSENTATION MATRICIELLE

Nous avons vu dans le Chapitre (ALG) 11 comment une matrice pouvait représenter un vecteur ou même une famille : on indiquait en colonne les coordonnées dans une base. Nous allons voir maintenant que :

1. pour connaître une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ où E, F sont deux espaces vectoriels de dimension finie (*i.e.* connaitre les $u(x)$ pour tout $x \in E$), il suffit de se donner une matrice à $\dim F$ lignes et $\dim E$ colonnes, donc à $\dim F \times \dim E$ coefficients.
2. Les opérations énoncées précédemment sur les matrices comme l'addition, la multiplication, l'inversion, correspondront à des matrices d'autres applications linéaires comme l'addition, la composition et l'inversion d'applications linéaires — que le monde est bien fait! 🙂

Note *Il en manque une à l'appel : la transposition. Elle aussi, elle possède son analogue « endomorphique », on l'appelle l'endomorphisme transposé, mais là on dépasse largement le cadre du programme.*

Exemple 17 **(Introductif)** Considérons $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (1x+2y, 3y+4z) \end{array} \right.$ et notons $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ la base canonique. Qu'est-ce qui est vraiment important dans cette écriture? Uniquement les coefficients $1, 2, 3, 4$ devant les inconnues. On pourrait donc décider de représenter cette application par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ mais cette écriture est peu pratique, on utilisera plutôt une écriture matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}^{\text{can}}}(u(e_1), u(e_2)) \qquad \text{car :} \quad \left\{ \begin{array}{ll} u(e_1) & = u(1,0) = (1,3) \\ u(e_2) & = u(0,1) = (2,4). \end{array} \right.$$

Cette dernière a en plus le mérite de faire appel à la définition de matrice de famille vue dans le Chapitre (ALG) 11.

3.1. Matrice d'une application linéaire

Formalisons le constat précédent dans une définition.

Définition 7 | Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $p = \dim \mathrm{E}$, $n = \dim \mathrm{F}$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle :

- *matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(\mathscr{B})) = \left(\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_1)) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}\big(u(e_p)\big)\right) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

- Lorsque E et F disposent d'une base canonique, et que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont les bases canoniques associées, on dit que $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est la *matrice canoniquement associée à u*.

On retiendra donc que :

nombre de LIGNES	=	dimension de l'espace d'ARRIVÉE
nombre de COLONNES	=	dimension de l'espace de DÉPART

Plus précisément, si l'on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$, alors la i-ième colonne (pour $i \in [\![1, p]\!]$) contient les coordonnées de $u(e_i)$ relativement à la base $\mathscr{C}$.

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} f_i \qquad \mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \star & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \star \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \star & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \star \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

Notation — Cas d'un endomorphisme

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ alors la matrice de l'endomorphisme u relativement à $\mathscr{B}$ est :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, c'est une matrice carrée de format $n \times n$.

Méthode — Calculer une matrice

Pour déterminer $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$, il faut donc :

1. calculer les vecteurs de $u(\mathscr{B})$, *i.e.* les $u(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.
2. Calculer ensuite les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base image $\mathscr{C}$, *i.e.* chercher les $\lambda_{i,j}$ tels que : $\quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} f_i$.
3. Conclure : la j-ème colonne de $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ sera donc : $\begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$.

Exemple 18 (Avec des uplets) Soit $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x + y - z, -x + 2z). \end{array}\right.$ Déterminer la matrice canoniquement associée à u.

Exemple 19 (Avec des polynômes) Soit $\mathrm{D} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}'. \end{array}\right.$ Déterminer la matrice canoniquement associée à D.

Exemple 20 **(Avec des fonctions)** Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \mathrm{Vect}(g,h)$, où g et h sont les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x \cos x$ et $h(x) = e^x \sin x$ respectivement.

1. La famille $\mathscr{B} = (g,h)$ est une base de F, et
$$D \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$$
définit un endomorphisme de F.

2. Déterminons la matrice de D relativement à $\mathscr{B}$.

Exemple 21 **(Avec des matrices)** Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MJ_2 - J_2M, \end{array} \right.$ où $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice canoniquement associée à f.

Exemple 22 **(Avec des suites)** Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, α et β deux réels distincts. On note $u = (\alpha^n) \in E$, $v = (\beta^n) \in E$ et $F = \mathrm{Vect}(u,v)$.

1. La famille $\mathscr{B} = (u,v)$ est une base de F. Nous l'admettons.
2. Soit ensuite $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminons la matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_0 + x_2, x_1, -x_0 + x_3). \end{array} \right.$$

Exemple 23 **(Identité)** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de E. Alors $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$, où :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

(des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs). De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on établit que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\lambda \,\mathrm{Id}_E) = \lambda I_n$.

Attention

Si l'espace vectoriel ambiant est un espace de
1. polynômes, on ne **met pas « de** X **»** dans les matrices !
2. suites, on ne **met pas « de** n **»** dans les matrices !
3. fonctions, on ne **met pas « de** x, t, ***etc.*** **»** dans les matrices !

Par définition d'une matrice, les éléments qui la constitue sont **des scalaires** *i.e.* des éléments de $\mathbb{K}$ (des réels ou des complexes).

Traitons à présent le cas de formes linéaires, *i.e.* des applications linéaires dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{K}$: leur matrice dans une base donnée est alors une matrice ligne.

Exemple 24 **(Deux formes linéaires)**

1. Déterminons la matrice de $u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 3x - y + 2z \end{array} \right.$ relativement à la base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ de $\mathbb{R}^3$ après avoir justifié la linéarité.

2. Déterminons la matrice de $\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(0) + P(1) + \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ relativement à la base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ après avoir justifié la linéarité.

Dans le Chapitre (ALG) 11, nous avons vu que toute matrice colonne de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pouvait être vue comme la matrice d'un vecteur dans un espace vectoriel de dimension n, et qu'en plus, si une base est fixée, ce vecteur est unique. Le même résultat existe pour les matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, c'est ce que nous voyons maintenant.

Théorème 6 | La matrice dans deux bases caractérise l'application

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F. Alors l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier,

- $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = n \times p$.
- Étant données deux bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F fixées, il y a une correspondance bijective entre les matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et les applications linéaires de E dans F. Et : $\forall (u,v) \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})^2, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,$
  - $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) + \mu \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(v)$ *(le symbole « Mat » est donc linéaire)*
  - $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(v) \iff u = v$.

Preuve

1. On admet que φ est linéaire, la preuve ne présente aucune difficulté.
2. Passons au caractère isomorphe. Nous allons montrer l'injectivité et la surjectivité.
   - **[Injectivité]** Puisque φ est linéaire, calculons son noyau. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ tel que $\varphi(u) = 0_{n,p}$, cela signifie que :
   $$\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(\mathscr{B})) = \left(\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_1)) \middle| \dots \middle| \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_p)) \right) = 0_{n,p}.$$
   Donc : $\forall i \in [\![1\,,\,p]\!], \quad \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_i)) = 0$, donc $u(e_i) = 0$. Ainsi, u est nulle sur une base, on montre ensuite avec des coordonnées que $u = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})}$ (u est nulle partout).
   - **[Surjectivité]** Soit $\mathrm{M} = \left(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}) \middle| \dots \middle| \mathrm{C}_p(\mathrm{M}) \right) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice écrite en colonne. On cherche $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ tel que :
   $$\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \left(\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_1)) \middle| \dots \middle| \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_p)) \right) = \left(\mathrm{C}_1(\mathrm{M}) \middle| \dots \middle| \mathrm{C}_p(\mathrm{M}) \right)$$
   $$\iff \forall i \in [\![1\,,\,p]\!], \quad \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_i)) = \mathrm{C}_i(\mathrm{M}).$$
   Or, d'après le Chapitre (ALG) 11, $x \in \mathrm{E}\,\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$ est un isomorphisme. Pour tout $i \in [\![1\,,\,p]\!]$, on choisit donc f_i de sorte que $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f_i) = \mathrm{C}_i(\mathrm{M})$, puis on considère l'unique application linéaire u telle que pour tout $i \in [\![1\,,\,p]\!]$, $u(e_i) = f_i$ (voir le Théorème 3).

Définition/Proposition 5 | Application associée à une matrice

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F.

- Pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire u appelé *application associée à* M *dans* $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ telle que : $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{M}$.
- Lorsque E, F disposent d'une base canonique ($\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$, $\mathbb{K}^n$, *etc.*), on dit que u vérifiant $\underset{\mathscr{B}^{\mathrm{can}},\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{M}$ est l'*application linéaire canoniquement associée à* M. Elle est définie par : $u \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{MX}. \end{array} \right.$

Preuve Presque tout a déjà été montré, il reste simplement à établir que pour

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{MX}, \end{array} \right. \quad \text{on a :} \quad \underset{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{M}.$$

- L'application u ainsi définie est linéaire.

- Nous avons $\underset{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{M}$.

Définition 8 | Noyau et image d'une matrice

On appelle *noyau de la matrice* M noté Ker M (*resp. image de la matrice* M noté Im M) le noyau de u (*resp.* l'image de u) où $u \in \mathscr{L}(\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ est l'application linéaire canoniquement associée à M. Plus explicitement, on définit :

- $\mathrm{Ker}\,\mathrm{M} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \,\middle|\, \mathrm{MX} = 0 \right\}$
- $\mathrm{Im}\,\mathrm{M} = \left\{ \mathrm{MX} \,\middle|\, \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\}$ $\left(\mathrm{Y} \in \mathrm{Im}\,\mathrm{M} \iff \exists \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{MX} = \mathrm{Y} \right)$

Remarque 10 (Théorème du rang matriciel) En appliquant le théorème du rang à u, on obtient un théorème du rang adapté aux matrices :

$$\textit{(le nombre de colonnes de M)} \quad p = \dim \mathrm{Ker}\,\mathrm{M} + \mathrm{Rg}\,\mathrm{M}.$$

Exemple 25 Déterminer l'application linéaire u canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Préciser le noyau et l'image de M.

3.2. Opérations endomorphiques & opérations sur les matrices

Nous allons voir le lien entre les opérations matricielles d'une part (somme et produit/inversion), et les opérations fonctionnelles d'autre part (somme et composée/inversion d'applications linéaires).

Théorème 7 | Écriture matricielle de $y = u(x)$
Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $x \in \mathrm{E}$. Alors :

$$\underbrace{\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x))}_{\text{« matrice d'un vecteur »}} = \underbrace{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)}_{\text{« matrice d'une app. »}} \times \underbrace{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)}_{\text{« matrice d'un vecteur »}}.$$

Remarque 11 **(Bases)** Le placement des bases est intuitivement clair.

- Si vous choisissez la base $\mathscr{B}$ comme base de départ de l'application u, alors u ne peut « *manger* » que des vecteurs x écrits dans $\mathscr{B}$ également.
- Si $\mathscr{F}$ est la base d'arrivée, alors $u(x)$ est lui aussi écrit dans la base d'arrivée.

Preuve Soient $p = \dim \mathrm{E}$ et $n = \dim \mathrm{F}$. On explicite les bases de E et F : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$.. Posons :

$$\mathrm{Y} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,p} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Alors on calcule :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f_i = y = u(x) = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_{i,j} x_j\right) f_i.$$

Par unicité des coordonnées de y dans la base $\mathscr{C}$, on en déduit :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} u_{i,j} x_j \iff \mathrm{Y} = \mathrm{U} \times \mathrm{X}.$$

On arrive maintenant au résultat principal concernant la matrice d'une composée d'applications.

Théorème 8 | Matrice d'une composée
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F, $\mathscr{B}''$ une base de G, soient $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.
Alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(u \circ v) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(u) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v).$$

Note *$\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}''$) est donc la base de **départ** (resp. d'**arrivée**) de la composée. En cas de trou de mémoire, on replace correctement les bases en suivant les flèches.*

Remarque 12 **(Diagramme de composée)** On peut visualiser cette propriété à l'aide d'un diagramme d'applications, sur lequel on précise quelle base est attachée à chaque espace vectoriel. Sous les flèches sont indiquées les transformations en terme de vecteurs (antécédent, puis image par l'application).

$$\underset{\mathrm{X}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)}{(\mathrm{E}, \mathscr{B})} \xrightarrow[\mathrm{B}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v)]{v} \underset{\mathrm{BX}}{(\mathrm{F}, \mathscr{B}')} \xrightarrow[\mathrm{A}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(u)]{u} \underset{\mathrm{ABX}}{(\mathrm{G}, \mathscr{B}'')} \quad \textbf{et} \quad \underset{\mathrm{X}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)}{(\mathrm{E}, \mathscr{B})} \xrightarrow[\mathrm{C}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(u\circ v)]{u\circ v} \underset{\mathrm{CX}}{(\mathrm{G}, \mathscr{B}'')}$$

Preuve Soit $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(u)$, $\mathrm{B} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v)$ et $\mathrm{C} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(u \circ v)$. Montrons alors que $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.
On note :

- $n = \dim \mathrm{E}$ et $p = \dim \mathrm{F}$, ainsi que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$,
- $q = \dim(\mathrm{G})$ et $\mathscr{B}'' = (e''_1, \dots, e''_q)$.

On note On écrit, pour chacune des matrices,

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{R}), \quad \mathrm{B} = (b_{ki})_{k,i} \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \mathrm{C} = (c_{kj})_{k,j} \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{R}).$$

Par définition,

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad u(e'_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{ij} e''_i$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad v(e_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} e'_k$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad (u \circ v)(e_j) = \sum_{k=1}^{q} c_{kj} e''_k$$

Pour tout $j \in [\![1\,,\,n]\!]$, on a également

$$(u \circ v)(e_j) = u\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj} e'_k\right) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} u(e'_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} \sum_{i=1}^{q} a_{ik} e''_i = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right) e''_i.$$

Par unicité des coefficients dans une base $\mathscr{B}''$ de G, il s'ensuit que :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,q]\!] \times [\![1\,,\,n]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = (\mathrm{AB})_{i,j}.$$

Ainsi, $\quad \mathrm{C} = \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

Exemple 26 **(avec des uplets)** Soient

$$u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3, & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, x+y+z), \end{array}\right. \qquad v : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+2y, x-y). \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Calculer $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$, $\underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(v)$, $\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(v \circ u)$ et $\underset{\mathscr{C},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u \circ v)$. Donner l'expression analytique de $u \circ v$ et de $v \circ u$.

Exemple 27 **(avec des polynômes)** Soient

$$u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1), \end{array}\right. \qquad v : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}-1). \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2[\mathrm{X}]$. Calculer $\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$, $\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(v)$, $\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(v \circ u)$ et $\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u \circ v)$. Était-ce prévisible ?

On déduit le corollaire suivant par récurrence immédiate sur n.

Corollaire 3 | Matrice d'une puissance
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E. Alors : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u^n) = \left[\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)\right]^n$

On en déduit maintenant facilement que la matrice de u^{-1}, si u est un isomorphisme, est l'inverse de la matrice de u.

Corollaire 4 | Matrice d'une application inverse
Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E.

- Alors : u est inversible $\iff \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est inversible.
- Dans ce cas, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(u^{-1}\right) = \left[\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)\right]^{-1}$.

Preuve

Remarque 13 (Diagramme d'une réciproque) On peut visualiser cette propriété à l'aide d'un diagramme d'applications, sur lequel on précise quelle base est attachée à chaque espace vectoriel. Sous les flèches sont indiquées les transformations en terme de vecteurs (antécédent, puis image par l'application).

$$\underset{\mathrm{X}=\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x)}{(\mathrm{E},\mathscr{B})} \xrightarrow[\mathrm{A}=\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)]{u} \underset{\mathrm{AX}}{(\mathrm{E},\mathscr{B})} \xrightarrow[\mathrm{A}^{-1}=\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u^{-1})]{u^{-1}} \underset{\mathrm{A}^{-1}\mathrm{AX}=\mathrm{X}}{(\mathrm{E},\mathscr{B})} \quad \underline{\textbf{et}} \quad \underset{\mathrm{X}=\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x)}{(\mathrm{E},\mathscr{B})} \xrightarrow[\mathrm{I}_n=\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u\circ u^{-1})]{u\circ u^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}} \underset{\mathrm{I}_n\mathrm{X}=\mathrm{X}}{(\mathrm{E},\mathscr{B})}$$

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire .... ☐
2. Savoir déterminer le noyau d'une application linéaire .... ☐
3. Savoir déterminer l'image d'une application linéaire .... ☐
4. Savoir démontrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective ... ☐

Exercice 1 | Études de linéarité Solution Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires, le montrer le cas échéant.

1. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto 2x^2$,
2. $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\longmapsto 4x-3$,
3. $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3, x\longmapsto \left(2x, x/\pi, x\sqrt{2}\right)$,
4. $\mathrm{S}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2, (x,y)\longmapsto(u,v)$, où (u,v) est l'unique solution de $\begin{cases} 3u-v = x, \\ 6u+2v = y, \end{cases}$
5. $\mathrm{D}:\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\longrightarrow\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f\longmapsto ff''$,
6. $\mathrm{E}:\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\longrightarrow\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f\longmapsto (x\longmapsto f(x^3))$,
7. $\mathrm{I}:\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\longrightarrow\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), f\longmapsto \left(x\longmapsto \int_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

4.1. Uplets et matrices

Exercice 2 | Solution Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2x+y). \end{array}\right.$

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3\right)$.
2. Montrer que f est injective.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 | Solution Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, $u=(1,1)$ et $v=(2,-1)$.

1. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'expression analytique $f(x,y)$ de l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f(u)=(2,1)$ et $f(v)=(1,-1)$.

Exercice 4 | Solution Soient les vecteurs $u=(1,1)$, $v=(2,-1)$ et $w=(1,4)$.

1. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur w dans la base (u,v).
3. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f(u)=(2,1)$ et $f(v)=(1,-1)$. Déterminer $f(x,y)$.
4. Pour quelles valeurs du paramètre réel a existe-t-il une application linéaire $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que : $\quad g(u)=(2,1),\quad g(v)=(1,-1),\quad g(w)=(5,a)$?

Exercice 5 | Solution Soient $f,g\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement :

$$M=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix},\quad\text{et}\quad N=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les matrices de $f^2,g^2,g\circ f$ et $f\circ g$.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et montrer que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)$
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(g)$.
4. On pose $h=f+g$. Calculer la matrice de $h\circ h$. Que peut-on en conclure?

Exercice 6 | Solution Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. On définit u par :

$$\forall M\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}),\quad u(M)=AM.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le rang, le noyau et l'image de u.

Exercice 7 | Solution Soit $\varphi\left|\begin{array}{ccc}\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})&\longrightarrow&\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})\\M&\longmapsto&AM-MA,\end{array}\right.$ où $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
2. 2.1) Écrire la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
   2.2) Déterminer le noyau de φ en utilisant la matrice B.
3. Soit $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.
   3.1) Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un espace vectoriel.
   3.2) En utilisant les questions précédentes, déterminer une base de $\mathscr{C}(A)$.

4.2. Polynômes

Exercice 8 | Solution Soit $f\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\P&\longmapsto&(P(1),P'(1)).\end{array}\right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que f est surjective.

Exercice 9 | Solution On définit φ par : $\quad\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\quad \varphi(P)=(1-X^2)P'+(3X+1)P.$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner son noyau. L'application φ est-elle surjective de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 10 | Solution Soient $n\geqslant3$ et $b\in\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\varphi\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X],\\P&\longmapsto&(X-b)(P'+P'(b))-2(P-P(b)).\end{array}\right.$$

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ \exists Q\in\mathbb{R}_n[X],\quad P=(X-b)^3Q\}$.
   2.1) Justifier que $F=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ \exists Q\in\mathbb{R}_{n-3}[X],\quad P=(X-b)^3Q\}$.
   2.2) Déterminer une base puis la dimension de F. En utilisant $\varphi(P)''$, démontrer que $\mathrm{Im}\,\varphi\subset F$.
   2.3) En utilisant à nouveau $\varphi(P)''$, démontrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi\subset\mathbb{R}_2[X]$.
   2.4) Déterminer noyau et image de φ.

Exercice 11 | **Endomorphisme aux différences finies de $\mathbb{C}_n[X]$.** Solution Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et Δ_n l'application :

$$\Delta_n\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{C}_n[X],\\P&\longmapsto&P(X+1)-P(X).\end{array}\right.$$

1. Calculer $\Delta(1),\Delta(X),\Delta(X^2)$.
2. Montrer que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Soit $P\in\mathrm{Ker}\,\Delta_n$ tel que $\deg(P)\geqslant1$. Montrer que $P-P(0)$ a une infinité de racines. En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Delta_n=\mathbb{C}_0[X]$.
4. En déduire que $\mathrm{Im}\,(\Delta_n)=\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
5. On définit dans cette question une application Δ comme

$$\Delta\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[X]&\longrightarrow&\mathbb{C}[X]\\P&\longmapsto&P(X+1)-P(X).\end{array}\right.$$

   À l'aide des questions précédentes, déterminer $\mathrm{Ker}\,\Delta$, et montrer que Δ est surjective à l'aide de la définition de la surjectivité. Commenter.

4.3. Suites et fonctions

Exercice 12 | Solution Sur $E=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit $\Phi:f\longmapsto f''+2f'+f$. Montrer que $\Phi\in\mathscr{L}(E)$ et déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Exercice 13 | Solution Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on considère les fonctions

$$f_1 : x \longmapsto e^{-x} \quad , \quad f_2 : x \longmapsto x e^{-x} \quad , \quad f_3 : x \longmapsto x^2 e^{-x},$$

et on note $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F. On la notera $\mathscr{B}$.
2. On considère l'application $\Phi : f \in F \longmapsto f'$. Montrer que Φ est un endomorphisme de F, puis écrire $A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\Phi)$.
3. Calculer A^n en écrivant A sous la forme $-I_n + N_n$ avec N_n une matrice de format $n \times n$.

Exercice 14 | **Étude d'une récurrence linéaire d'ordre 2** Solution Soit E l'ensemble :

$$E = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{1}{4} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \right\}.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit
$$f \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2). \end{array} \right.$$
Montrer que f est un isomorphisme. En déduire la dimension de E.
3. Donner trois suites géométriques de E.
4. En déduire E.

4.4. Généralités & Abstraits

Exercice 15 | Solution Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^3 - 3f - 2\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Prouver que f est un automorphisme de E et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Soit g un endomorphisme de E tel que : $g^3 - g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et tel que $g \neq \mathrm{Id}_E$. Montrer que g n'est pas bijectif.

Exercice 16 | Solution Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad f(e_3) = -2e_2 + 6e_3.$$

1. Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}$.
2. Déterminer le rang de f, une base et la dimension de son noyau et de son image.

Exercice 17 | Solution Soient $p \geqslant 3$ et

$$D_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{C}).$$

1. On souhaite étudier dans cette question l'inversibilité de D_p.
   - **1.1)** Inverser les matrices D_3 et D_4.
   - **1.2)** Prouver que D_p est inversible et donner son inverse. On émettra une conjecture que l'on cherchera à démontrer.
2. On souhaite dans cette question retrouver le résultat précédent dans le cas $p = 4$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $f(e_4) = e_1$.
   - **2.1)** Justifier, sans calcul, que f est un automorphisme.
   - **2.2)** Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}$ que l'on notera A.
   - **2.3)** Déterminer l'application réciproque de f, et en déduire D_4^{-1}.
   - **2.4)** Comment pourrait-on généraliser ce qui précède à D_p, en utilisant un endomorphisme ?

Exercice 18 | **Base cyclique** Solution Soient E un espace vectoriel de dimension 3, et f un endomorphisme de E. On suppose que $f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ soit une base de E. Donner alors la matrice de f dans cette base.

Exercice 19 | Solution Soient E, F et G des espaces vectoriels. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

1. **1.1)** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
   - **1.2)** En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme alors f est injective et g est surjective.
2. Montrer que : $\quad g \circ f = 0_{\mathscr{L}}(E, F) \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé

1. L'application f n'est pas linéaire, à cause du carré. En effet, $f(2\times 1) = f(2) = 2\times 4 = 8 \neq 2f(1)(=2.2)$.
2. Puisque $g(0) = -3 \neq 0$, l'application g n'est pas non plus linéaire.
3. Cette fois-ci c'est bon. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} h(\lambda x + \mu x') &= \left(2(\lambda x + \mu x'), (\lambda x + \mu x')/\pi, (\lambda x + \mu x')\sqrt{2}\right) \\ &= \left(2\lambda x + 2\mu x', \lambda/\pi x + \mu/\pi x', \lambda\sqrt{2}x + \mu\sqrt{2}x'\right) \\ &= \lambda\left(2x, x/\pi, x\sqrt{2}\right) + \mu\left(2x', x'/\pi, x'\sqrt{2}\right) \\ &= \lambda h(x) + \mu h(x'). \end{aligned}$$
4. Résolvons le système. On a, en notant $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, inversible d'inverse $\mathrm{M}^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$:
$$\begin{cases} 3u - v = x, \\ 6u + 2v = y, \end{cases} \iff \mathrm{M}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Donc : $\boxed{u = \dfrac{1}{12}(3x+y),\ v = \dfrac{1}{12}(-6x+3y)}$. *(On peut bien sûr résoudre directement le système sans matrice)* On vérifie ensuite sans difficulté que les applications $(x,y) \longmapsto \left(\dfrac{1}{12}(3x+y), \dfrac{1}{12}(-6x+3y)\right)$ est bien linéaire.
5. L'application n'est pas linéaire à cause du produit. Prenons $f = \mathrm{X}^2 : x \longmapsto x^2$. Alors $\mathrm{D}(2f) = (2\mathrm{X}^2)\times 4 = 8\mathrm{X}^2 \neq 2\mathrm{D}(f) = 2\mathrm{X}^2 \neq 8\mathrm{X}^2$.
6. L'application E est linéaire, par linéarité de l'évaluation en x^3 pour tout x. En effet, soient $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{E}(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(x^3) = \lambda f(x^3) + \mu g(x^3) = \lambda \mathrm{E}(f)(x) + \mu \mathrm{E}(g)(x).$$
Cela signifie bien que $\mathrm{E}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathrm{E}(f) + \mu\mathrm{E}(g)$. Donc E est linéaire. Notons que $\mathrm{E}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})) \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, comme le prétend l'énoncé, puisqu'une composée d'applications $\mathscr{C}^\infty$ et $\mathscr{C}^\infty$.
7. L'application I est linéaire, par linéarité de de l'intégration. En effet, soient $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \mathrm{I}(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^x (x-t)^2(\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t && \textit{linéarité de l'évaluation} \\ &= \int_0^x \left(\lambda(x-t)^2 f(t) + \mu(x-t)^2 g(t)\right)\mathrm{d}t && \textit{linéarité de l'intégration} \\ &= \lambda\mathrm{I}(f)(x) + \mu\mathrm{I}(g)(x). \end{aligned}$$
Donc I est linéaire. Reste à justifier (même si l'énoncé le prétend!) que $\mathrm{I}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Il s'agit d'une intégrale à borne variable, cependant, l'intégrande (la fonction que l'on intègre) dépend elle aussi de x. Développons le carré : soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{I}(f)(x) = x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Notons F (*resp.* G, *resp.* H) une primitive de f (*resp.* $\mathrm{Id} f$, *resp.* $\mathrm{Id}^2 f$), ces trois pimitives existent car chacune des fonctions citée est continue. Or, chaque fonction F, G, H est $\mathscr{C}^\infty$ puisque leur dérivée première est égale à une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi, par somme/produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, $\mathrm{I}(f)$ l'est aussi.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y) + \mu(x',y')) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x' - (\lambda y + \mu y'), 2\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y') \\ &= \lambda(x - y, 2x + y) + \mu(x' - y', 2x' + y') \\ &= \lambda f(x,y) + \mu f(x',y'). \end{aligned}$$
Donc : $\boxed{f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)}$.
2. On calcule le noyau. On a :
$$(x,y) \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y) = (x-y, 2x+y) = (0,0)$$
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$$
après résolution du système. Donc : $\boxed{f \text{ est injective}}$.
3. On sait d'après le théorème du rang (puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie), que $\operatorname{Rg} f = 2 - 0 = 2$. De plus, d'après le cours $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(1,0), f(0,1)) = \operatorname{Vect}((1,2),(-1,1))$. Or $\operatorname{Card}((1,2),(-1,1)) = 2 = \operatorname{Rg} f$ et $((1,2),(-1,1))$ est génératrice donc c'est une base. Ainsi, $\boxed{((1,2),(-1,1)) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(f)}$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Calculons par exemple le rang de la famille dans la base canonique. On a :
$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}\mathrm{can}}((u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \operatorname{Rg}(u,v) = \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice étant inversible (déterminant non nul), elle est de rang 2, qui est égal au cardinal de la famille.
Donc : $\boxed{(u,v) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.
2. On a deux hypothèses : $f(u) = (2,1)$ et $f(v) = (1,-1)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Cher-

chons $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ de sorte que $(x,y)=\lambda u+\mu v$, ou de manière équivalente :

$$\left\{\begin{array}{lll}\lambda+2\mu & =x & (1)\\ \lambda-\mu & =y & (2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll}3\mu & =x-y & (1)-(2)\\ 3\lambda & =2y+x & 2(2)+(1)\end{array}\right. .$$

Ainsi, on a montré que :

$$(x,y)=\frac{2y+x}{3}u+\frac{x-y}{3}v.$$

Puisque f est linéaire, on a :

$$f(x,y)=\frac{2y+x}{3}f(u)+\frac{x-y}{3}f(v).$$

En utilisant les deux hypothèses, on déduit alors :

$$f(x,y)=\frac{2y+x}{3}(2,1)+\frac{x-y}{3}(1,-1)=\boxed{(x+y,y)}.$$

Solution (exercice 4) Énoncé

1. Comme on sait que $\dim\mathbb{R}^2=2$ et que la famille de vecteurs (u,v) a deux vecteurs, il suffit de montrer que cette famille est libre pour qu'elle soit une base de $\mathbb{R}^2$. Comme les deux vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, la famille (u,v) est libre et ainsi $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}^2}$.
2. On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $w=au+bv$. On doit donc résoudre le système linéaire suivant : $\left\{\begin{array}{rcl}a+2b & = & 1\\ a-b & = & 4\end{array}\right.$. La résolution donne : $w=3u-v$, donc $\boxed{\mathrm{M}_{(u,v)}(w)=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}}$.
3. On sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base. Donc comme (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$, il existe bien une unique application linéaire f vérifiant $f(u)=(2,1)$ et $f(v)=(1,-1)$. On sait de plus qu'il existe a,b,c,d tels que $f(x,y)=(ax+by,cx+dy)$. On a donc : $f(u)=(2,1)\iff(a+b,c+d)=(2,1)$ et $(2a-b,2c-d)=(1,-1)$. On résout le système associé, et on obtient $a=b=d=1$ et $c=0$, soit $\boxed{f(x,y)=(x+y,y)}$.
4. Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait qu'il existe une unique application linéaire g entièrement déterminée par la donnée de $g(u)$ et de $g(v)$ car (u,v) base de $\mathbb{R}^2$. De plus, on sait que l'on a : $w=3u-v$. Comme g est linéaire, on a : $g(w)=g(3u-v)=3g(u)-g(v)=3(2,1)-(1,-1)=(5,4)$. Ainsi, pour que g soit linéaire, on doit avoir : $\boxed{a=4}$.

Solution (exercice 5) Énoncé On sait donc par hypothèse que :

$$\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f)=\mathrm{M},\quad \underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(g)=\mathrm{N}.$$

1. $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f^2)=\mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$.

   $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(g^2)=\mathrm{N}^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$.

   $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(g\circ f)=\mathrm{NM}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix}}$

   $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f\circ g)=\mathrm{MN}=\begin{pmatrix}2&-4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}}$. Ces calculs nous apprennent donc que : $f^2=0, g^2=0$.
2. D'après le cours,
$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(1,0),f(0,1)).$$
Or, $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f(1,0))=\mathrm{M}\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f(0,1))=\mathrm{M}\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$, donc $f(1,0)=(2,1)$ et $f(0,1)=(-4,-2)$, d'où :
$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}((2,1),(-4,-2))=\mathrm{Vect}((2,1))$$
puisque $(-4,-2)=-2(2,1)$. Comme $(2,1)\neq(0,0)$, $\boxed{((2,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$.
On a vu que $\mathrm{Rg}=1$ et d'après le théorème du rang, on a $\dim\mathrm{Ker} f=2-1=1=\dim\mathrm{Im} f$. Ainsi, il suffit de montrer une inclusion, par exemple $\mathrm{Im} f\subset\mathrm{Ker} f$. Pour cela, montrons que $(2,1)\in\mathrm{Ker} f$, c'est-à-dire $f(2,1)=(0,0)$. Or,
$$\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f(2,1))=\mathrm{M}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\implies f(2,1)=(0,0).$$
Donc, on a bien montré que : $\boxed{\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(f)}$.
3. Sans calcul, on voit que g est de rang 1 puisque g l'est. De plus,
$$\mathrm{Im}\, g=\{g(x,y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}.$$
Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(g)=\mathrm{N}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\0\end{pmatrix}$. Donc :
$$\mathrm{Im}\, g=\{(y,0)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}((1,0)).$$
Ainsi, $\boxed{((1,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\, g}$.
4. On pose $h=f+g$. Alors :
$$\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(h\circ h)=\left(\underset{\mathscr{B}\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f+g)\right)^2=(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2=\boxed{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}.$$ On en conclut que $h\circ h=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
Donc $\boxed{f+g \text{ est inversible d'inverse } f+g}$.

Solution (exercice 6) Énoncé

1. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, et λ, λ' deux réels. Alors
$$u(\lambda \mathrm{M} + \mu \mathrm{M}') = \mathrm{A}(\lambda \mathrm{M} + \mu \mathrm{M}') = \lambda \mathrm{AM} + \mu \mathrm{AM}' = \lambda u(\mathrm{M}) + \mu u(\mathrm{M}'),$$
donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. Rappelons que la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$, et que
$$u(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$u(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$u(\mathrm{E}_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$u(\mathrm{E}_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc : $\boxed{\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. Déterminer une forme échelonnée-réduite de la matrice précédente.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 1\times \mathrm{L}_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 1\times \mathrm{L}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Rg}\, u = 2}$. On a en effet deux pivots. D'après le théorème du rang, le noyau est donc de dimension $4 - 2 = 2$.

- Calculons le noyau. Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Alors :
$$u(\mathrm{M}) = 0_{4,4} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + c &= 0 \\ b + d &= 0. \end{cases}$$
En d'autres termes : $\mathrm{M} \in \mathrm{Ker}\, u \iff \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc : $\boxed{\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)}$.

- D'après le cours,
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, u &= \mathrm{Vect}(u(\mathrm{E}_{1,1}), u(\mathrm{E}_{1,2}), u(\mathrm{E}_{2,1}), u(\mathrm{E}_{2,2})) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$
Puisqu'il n'y a que deux matrices distinctes, on obtient alors :
$$\boxed{\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}.$$
Comme les deux matrices sont clairement non colinéaires, elles forment une base de $\mathrm{Im}\, u$.

Solution (exercice 7) Énoncé

1. On a clairement $\varphi(\mathrm{M}) \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Soient $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \mathrm{M}_1 + \mu \mathrm{M}_2) &= \mathrm{A}(\lambda \mathrm{M}_1 + \mu \mathrm{M}_2) - (\lambda \mathrm{M}_1 + \mu \mathrm{M}_2)\mathrm{A} \\ &= \lambda(\mathrm{AM}_1 - \mathrm{M}_1\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{AM}_2 - \mathrm{M}_2\mathrm{A}) \quad \textit{linéarité du produit matriciel} \\ &= \lambda\varphi(\mathrm{M}_1) + \mu\varphi(\mathrm{M}_2). \end{aligned}$$
Donc : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})}$.

2. **2.1)** Rappelons que la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est :
$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On calcule ensuite les matrices :
$$\varphi(\mathrm{E}_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\varphi(\mathrm{E}_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\varphi(\mathrm{E}_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\varphi(\mathrm{E}_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
On déduit alors la matrice ci-après dans la base $(\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{2,2})$:
$$\boxed{\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

2.2) On a $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est un élément du noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ si et seulement si :
$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0_{2,2} \iff \underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) \times \underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(0_{2,2}).$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff b = -c, \quad a = d.$$

Ainsi, $\quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\varphi \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = aI_2 + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)}$.

3. Soit $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

3.1) La matrice nulle commute avec A, et $\mathscr{C}(A) \subset \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Soient maintenant $M_1, M_2 \in \mathscr{C}(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} A(\lambda M_1 + \mu M_2) &= \lambda AM_1 + \mu AM_2 \\ &= \lambda M_1 A + \mu M_2 A = (\lambda M_1 + \mu M_2)A. \end{aligned} \Big) M_1, M_2 \in \mathscr{C}(A)$$

Ainsi, $\lambda M_1 + \mu M_2 \in \mathscr{C}(A)$.

Donc : $\boxed{\mathscr{C}(A) \text{ est un espace vectoriel.}}$

3.2) Par définition, $\operatorname{Ker}\varphi = \mathscr{C}(A)$. Donc en utilisant une question précédente, on obtient immédiatement :

$$\mathscr{C}(A) = \operatorname{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ étant clairement non-colinéaires, elles forment une base de $\mathscr{C}(A)$.

Donc : $\boxed{\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathscr{C}(A)}$.

Solution (exercice 8) Énoncé

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + \mu P_2) &= ((\lambda P + \mu Q)(1), (\lambda P_1 + \mu P_2)'(1)) \\ &= (\lambda P(1) + \mu Q(1), \lambda P'(1) + \mu Q'(1)) \Big) \textit{linéarité de l'éval. et dérivation} \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien linéaire}}$.

2. $P \in \operatorname{Ker} f \iff f(P) = (0,0) \iff P(1) = P'(1) = 0$. La dernière condition signifie que 1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P. Ainsi,

$$P \in \operatorname{Ker} f \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad P = (X-1)^2(aX+b) = aX(X-1)^2 + b(X-1)^2.$$

Donc : $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(X(X-1), (X-1)^2)}$.

3. La famille $(X(X-1), (X-1)^2)$ est libre car échelonnée, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$. Ainsi, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et par théorème du rang, $\operatorname{Rg} f = \dim \mathbb{R}_3[X] - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 2 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

Solution (exercice 9) Énoncé

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda P + \mu Q) \\ &= (X-b)((\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q)'(b)) - 2((\lambda P + \mu Q) - (\lambda P + \mu Q)(b)) \\ &= \lambda(X-b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b)) + \mu(X-b)(Q' + Q'(b)) - 2(Q - Q(b)), \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation, et de l'évaluation en b. De plus, $\deg\big((X-b)(P'+P'(b))\big) = \deg P \leqslant n$ et $\deg(P - P(b)) = \deg P \leqslant n$. Donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ en tant que somme de polynômes de degré au plus n.

En conclusion, $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. **2.1)** Condition de degré, avec les notations de l'énoncé, si $P \in F$ alors on a $\deg Q + 3 = \deg P$ donc $\deg Q \leqslant n-3$.

2.2) Soit $P \in F$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ tel que $P = (X-b)^3 Q$. Il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-3} \in \mathbb{R}$ tels que $Q = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-3}X^{n-3}$. Donc

$$P = \lambda_0(X-b)^3 + \lambda_1(X-b)^3 X + \cdots + \lambda_{n-3}(X-b)^3 X^{n-3}.$$

Autrement dit, la famille $\mathscr{F} = ((X-b)^3, X(X-b)^3, \dots, X^{n-3}(X-b)^3)$ est une famille génératrice de F. Elle est de plus libre car échelonnée. Donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une base de F.}}$ Elle est de cardinal $n-2$, donc $\dim F = n-2$.

Calculons $\varphi(P)''$:

$$\varphi(P)' = P' + P'(b) + (X-b)P'' - 2P'$$

$$\varphi(P)'' = P'' + P'' + (X-b)P''' - 2P'' = (X-b)P'''.$$

Constatons que $\varphi(P)(b) = \varphi(P)'(b) = \varphi(P)''(b)$ donc b est une racine de multiplicité au moins trois de $\varphi(P)$, c'est exactement dire que $\boxed{\varphi(P) \in F.}$

2.3) Recyclons une nouvelle fois le calcul précédent. Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(P) = 0$ donc $\varphi(P)'' = 0 = (X-b)P'''$. Par propriété du cours, comme $X - b \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, nous avons $P''' = 0$, *i.e.* $\boxed{P \in \mathbb{R}_2[X]}$ en primitivant deux fois l'égalité $P''' = 0$.

2.4) Appliquons le théorème du rang à φ puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. Nous avons : $\quad \dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Rg}\varphi = n+1$.

Or, d'après les questions précédentes, $\dim \operatorname{Ker}\varphi \leqslant 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ et $\operatorname{Rg}\varphi \leqslant \dim F = n-3+1 = n-2$. Donc comme $3 + n - 1 = n+1$, on a nécessairement $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3$ et $\operatorname{Rg}\varphi = n-2$. Par égalité des dimensions, les inclusions deviennent alors des égalités :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_2[X]}, \quad \boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = F}.$$

Solution (exercice 10) Énoncé

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}&\varphi(\lambda P+\mu Q)\\ &= (X-b)((\lambda P+\mu Q)'+(\lambda P+\mu Q)'(b)) - 2((\lambda P+\mu Q)-(\lambda P+\mu Q)(b))\\ &= \lambda(X-b)(P'+P'(b)) - 2(P-P(b)) + \mu(X-b)(Q'+Q'(b)) - 2(Q-Q(b)),\end{aligned}$$
par linéarité de la dérivation, et de l'évaluation en b. De plus, $\deg\big((X-b)(P'+P'(b))\big) = \deg P \leqslant n$ et $\deg(P-P(b)) = \deg P \leqslant n$. Donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ en tant que somme de polynômes de degré au plus n.
En conclusion, $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. **2.1)** Condition de degré, avec les notations de l'énoncé, si $P \in F$ alors on a $\deg Q + 3 = \deg P$ donc $\deg Q \leqslant n-3$.

   2.2) Soit $P \in F$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ tel que $P = (X-b)^3 Q$. Il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-3} \in \mathbb{R}$ tels que $Q = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n-3}X^{n-3}$. Donc
   $$P = \lambda_0(X-b)^3 + \lambda_1(X-b)^3 X + \cdots + \lambda_{n-3}(X-b)^3 X^{n-3}.$$
   Autrement dit, la famille $\mathscr{F} = ((X-b)^3, X(X-b)^3, \dots, X^{n-3}(X-b)^3)$ est une famille génératrice de F. Elle est de plus libre car échelonnée. Donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une base de F.}}$ Elle est de cardinal $n-2$, donc $\dim F = n-2$.
   Calculons $\varphi(P)''$:
   $$\varphi(P)' = P' + P'(b) + (X-b)P'' - 2P'$$
   $$\varphi(P)'' = P'' + P'' + (X-b)P''' - 2P'' = (X-b)P'''.$$
   Constatons que $\varphi(P)(b) = \varphi(P)'(b) = \varphi(P)''(b)$ donc b est une racine de multiplicité au moins trois de $\varphi(P)$, c'est exactement dire que $\boxed{\varphi(P) \in F.}$

   2.3) Recyclons une nouvelle fois le calcul précédent. Si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, alors $\varphi(P) = 0$ donc $\varphi(P)'' = 0 = (X-b)P'''$. Par propriété du cours, comme $X - b \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, nous avons $P''' = 0$, *i.e.* $\boxed{P \in \mathbb{R}_2[X]}$ en primitivant deux fois l'égalité $P''' = 0$.

   2.4) Appliquons le théorème du rang à φ puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie $n+1$. Nous avons : $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{Rg}\varphi = n+1$.
   Or, d'après les questions précédentes, $\dim\operatorname{Ker}\varphi \leqslant 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ et $\operatorname{Rg}\varphi \leqslant \dim F = n-3+1 = n-2$. Donc comme $3+n-1 = n+1$, on a nécessairement $\dim\operatorname{Ker}\varphi = 3$ et $\operatorname{Rg}\varphi = n-2$. Par égalité des dimensions, les inclusions deviennent alors des égalités :
   $$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_2[X]}, \quad \boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = F}.$$

Solution (exercice 11) Énoncé

1. $\Delta(1) = 1-1 = 0, \Delta(X) = X+1-X = 1, \Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1$. Le degré semble chuter de un.

2. Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors :
$$\begin{aligned}\Delta_n(\lambda P+\mu Q) &= (\lambda P+\mu Q)(X+1) - (\lambda P+\mu Q)(X)\\ &= \lambda(P(X+1)-P(X)) + \nu(Q(X+1)-Q(X))\\ &= \lambda\Delta_n(P) + \nu\Delta_n(Q).\end{aligned}$$
De plus, si $\deg P \leqslant n$ alors $\deg \Delta_n(P) \leqslant n$ puisque c'est une différence de polynômes de degré au plus n. Finalement, on a bien montré que $\boxed{\Delta_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X]}$.

3. Soit $P \in \operatorname{Ker}\Delta_n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$. En particulier, $P(n) = P(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $P - P(0)$ possède une infinité de racines, donc il est nul, et $P = P(0)$ est le polynôme constant. Donc $\operatorname{Ker}\Delta_n \subset \mathbb{C}_0[X]$. Inversement, montrons que $\mathbb{C}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\Delta_n$. Soit $P = C \in \mathbb{C}$ un polynôme constant, alors $\Delta(P) = C - C = 0$. En conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}\Delta_n = \mathbb{C}_0[X].}$

4. D'après le théorème du rang, $\dim\operatorname{Ker}\Delta_n + \operatorname{Rg}\Delta_n = \dim\mathbb{C}_n[X] = n+1$, donc comme $\dim\operatorname{Ker}\Delta_n = 1$ d'après la question précédente, il vient $\operatorname{Rg}\Delta_n = n+1-1 = n$. Il suffit alors de montrer que $\operatorname{Im}\Delta_n \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Si tel que le cas, puisque $\dim\operatorname{Im}\Delta_n = \dim\mathbb{C}_{n-1}[X] = n$, on aura l'égalité $\operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ par égalité des dimensions.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, alors par linéarité de Δ_n et d'après le formule du binôme,
$$\Delta_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Delta_n(X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}X^\ell - X^k\right).$$
On constate que les termes d'ordre $\ell = k$ dans la somme interne sont nuls pour tout k, donc
$$\Delta_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{k}{\ell}X^\ell.$$
Sous cette forme, on voit alors $\deg\Delta_n(P) = n-1$. On a bien montré que $\operatorname{Im}\Delta_n \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Et donc par égalité des deux dimensions :
$$\boxed{\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{C}_{n-1}[X]}.$$

5. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, alors notons $q = \deg Q$. Nous avons donc $Q \in \mathbb{C}_q[X]$, alors puisque Δ_{q+1} est surjective d'après le début de l'exercice (et que Δ_{q+1} est à valeurs dans $\mathbb{C}_q[X]$), il existe $P \in \mathbb{C}_{q+1}[X]$ tel que $\Delta_{q+1}(P) = Q = \Delta(P)$. Donc : $\boxed{\Delta \text{ est surjective}}$.
En revanche, Δ n'est pas injective puisque le noyau est encore une fois constitué des polynômes constants. Puisque $\mathbb{C}[X]$ n'est pas de dimension finie, cela n'est pas étonnant, l'injectivité n'est dans ce cadre pas nécessairement équivalente à la surjectivité.

Solution (exercice 12) Énoncé Soit $f \in \mathrm{E}$. Alors :

$$f \in \operatorname{Ker}\Phi \iff f'' + 2f' + f = 0$$
$$\iff f \text{ est solution de } y'' + 2y' + y = 0.$$

Résolvons cette équation différentielle. L'équation caractéristique est $r'' + 2r' + 1 = (r+1)^2 = 0$, de racine double -1. Donc :

$\operatorname{Ker}\Phi = \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto (\mathrm{A}x + b)\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{A}x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{B}\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

En d'autres termes : $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Vect}(f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}, g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x})$. Montrons que (f,g) est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu x \mathrm{e}^{-x} = 0,$$

en multipliant par e^x, on déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu x = 0$, donc $\lambda = \mu = 0$ (car le polynôme $\lambda + \mu \mathrm{X}$ est alors nul).

Donc : $\boxed{(f,g) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\Phi}$.

Solution (exercice 13) Énoncé

1. la famille $\mathscr{B}$ est par construction une famille génératrice de F. Soient λ, μ, ν trois réels tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu x \mathrm{e}^{-x} + \nu x^2 \mathrm{e}^{-x} = 0,$$
en multipliant par e^x, on déduit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda + \mu x + \nu x^2 = 0.$$
Cela signifie que le polynôme $\lambda + \mu \mathrm{X} + \nu \mathrm{X}^2$ est nul, donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, la famille $\boxed{(f_1, f_2, f_3) \text{ est donc une base de F.}}$
2. On considère l'application $\Phi : f \in \mathrm{F} \longmapsto f'$. L'application Φ est bien linéaire, par linéarité de la dérivation. Soit maintenant $g = \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3$ un élément de F avec λ, μ, ν trois réels. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} g'(x) &= \lambda f_1'(x) + \mu f_2'(x) + \nu f_3'(x) \\ &= -\lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu(\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) + \nu(2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (\mu - \lambda) f_1(x) + (2\nu - \mu) f_2(x) - \nu f_3(x). \end{aligned}$$
Donc $\mathrm{D}(g) \in \mathrm{F}$ et $\boxed{\text{D est bien un endomorphisme de F.}}$ On a par ailleurs :
$$\mathrm{D}(f_1) = -f_1, \quad \mathrm{D}(f_1) = -f_1, \quad \mathrm{D}(f_3) = 2f_2 - f_3.$$
D'où : $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.
3. Posons $\mathrm{N}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{A} = -\mathrm{I}_n + \mathrm{N}_n$. Alors $-\mathrm{I}_n$ et N_n commutent, et $\mathrm{N}_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{N}_n^3 = 0$. On peut donc utiliser la formule du binôme
$$\mathrm{A}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\mathrm{I}_n)^{n-k} \mathrm{N}_n^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{N}_n^k.$$
Alors,
$$\mathrm{A}^n = \begin{cases} (-1)^n \mathrm{I}_n + n(-1)^{n-1}\mathrm{N}_n + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\mathrm{N}_n^2 & \text{si } n \geqslant 2, \\ \mathrm{A} & \text{si } n = 1, \\ \mathrm{I}_n & \text{si } n = 0. \end{cases}$$
Les trois formules se réunissent en une seule :
$$\forall n \geqslant 0, \quad \mathrm{A}^n = (-1)^n \mathrm{I}_n + n(-1)^{n-1}\mathrm{N}_n + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\mathrm{N}_n^2$$
d'où
$$\boxed{\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & n(n-1)(-1)^n \\ 0 & (-1)^n & 2n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}},$$
car $(-1)^{n-2} = (-1)^n$ car les entiers $n, n-2$ ont même parité.

Solution (exercice 14) Énoncé

1. La suite nulle vérifie la relation de récurrence. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites de E, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} (\lambda u_n + \mu v_n)_{n+3} &= \lambda u_{n+3} + \mu v_{n+3} \\ &= \lambda\left(u_{n+2} + \frac{1}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) + \mu\left(v_{n+2} + \frac{1}{4}v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n\right) \\ &= (\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) + \frac{1}{4}(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - \frac{1}{4}(\lambda u_n + \mu v_n). \end{aligned}$$
$(u_n), (v_n)$ sont deux suites de E

Donc : $\boxed{(\lambda u_n + \mu v_n) \in \mathrm{E} \text{ et E est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$
2. Soit
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2). \end{array}\right.$$
Montrons que f est un isomorphisme. Soient donc $(u_n), (v_n) \in \mathrm{E}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u_0 + \mu v_0, \lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2), \\ &= \lambda(u_0, u_1, u_2) + \mu(v_0, v_1, v_2), \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$
Donc $\boxed{f \text{ est une application linéaire.}}$ De plus, soit $(u_n) \in \operatorname{Ker} f$, alors $u_0 = u_1 = u_2$ puis par récurrence immédiate $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 3$. Ainsi $(u_n) =$

(0). Enfin si $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on peut construire une suite $(u_n)\in \mathrm{E}$ telle que $u_0=x, u_1=y, u_2=z$. Donc f est finalement une bijection linéaire et c'est un $\boxed{\text{isomorphisme.}}$ D'après le cours, E est alors de dimension finie et

$$\boxed{\dim \mathrm{E}=\dim\mathbb{R}^3=3.}$$

3. On cherche une suite de la forme (q^n) qui soit dans E avec $q\in\mathbb{R}^\star$ (la suite nulle est bien entendu une solution). Alors

$$\begin{aligned}(q^n)_n\in\mathrm{E} &\iff \forall n\in\mathbb{N},\quad q^{n+3}=q^{n+2}+\frac14 q^{n+1}-\frac14 q^n, && \Big\downarrow q\neq 0\\ &\iff q^3=q^2+\frac14 q-\frac14 && \Big\downarrow 1\ \textit{est racine évidente}\\ &\iff (q-1)\left(q^2+q-\frac14\right)=0.\end{aligned}$$

Les deux racines de $\mathrm{X}^2+\mathrm{X}-\dfrac14$ sont $\dfrac{-1\pm\sqrt2}{2}$. Notons $q_1=1, q_2=\dfrac{-1-\sqrt2}{2}$ et $q_3=\dfrac{-1+\sqrt2}{2}$. Alors $\boxed{(q_1^n)_n,(q_2)_n^n,(q_3^n)_n \text{ sont trois suites géométriques de E.}}$

4. On montre alors que ces trois suites forment une famille libre de E. Puisque $((q_1^n)_n,(q_2)_n^n,(q_3^n)_n)$ sera alors une famille de cardinal 3 et que $\dim\mathrm{E}=3$, ce sera une base de E et on aura

$$\boxed{\mathrm{E}=\mathrm{Vect}\big((q_1^n)_n,(q_2)_n^n,(q_3^n)_n.\big)}$$

Reste à montrer la liberté. Soient λ,μ,ν tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\lambda q_1^n+\mu q_2^n+\nu q_3^n=0.$$

On constate que $|q_2|>|q_1|>|q_3|$. Alors, puisque $q_2\neq 0$, l'hypothèse est équivalente à

$$\lambda\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n+\mu\left(\frac{q_3}{q_2}\right)^n+\mu 1=0.$$

Puisque $\left|\dfrac{q_1}{q_2}\right|<1$ et $\left|\dfrac{q_3}{q_2}\right|<1$, les deux suites précédentes tendent vers zéro (propriété sur les suites géométriques), donc en faisant $n\to\infty$, on obtient $\mu=0$. On fait ensuite de-même en mettant cette fois-ci q_1 en facteur, on obtient $\lambda=0$ puis vient alors $\nu=0$. En conclusion, $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de E.

Solution (exercice 15) Énoncé

1. On a :

$$f^3-3f-2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}\iff f^3-3f=2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}\iff \frac12(f^2-3\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})\circ f=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$$
$$\iff f\circ\left(\frac12(f^2-3\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})\right)=\mathrm{Id}_\mathrm{E}\,.$$

On a donc trouvé une application g vérifiant $g\circ f=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ et $f\circ g=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$: f est un automorphisme de E, et on a : $\boxed{f^{-1}=\dfrac12(f^2-3\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})}$.

2. On a : $g^3-g^2=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}\iff g^2\circ(g-\mathrm{Id}_\mathrm{E})=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Raisonnons par l'absurde : supposons que g est bijective. On a alors $g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^2\circ(g-\mathrm{Id}_\mathrm{E})=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$, soit $g=\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Ceci n'est pas possible d'après l'énoncé. On a donc montré que $\boxed{g \text{ n'est pas bijectif}}$.

Solution (exercice 16) Énoncé

1. Par définition d'une matrice, on a :

$$\boxed{\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&3&-2\\1&1&6\end{pmatrix}}.$$

2. On échelonne et on réduit la matrice : $\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ Notez qu'il n'est pas forcément utile d'aller jusqu'à l'échelonnée-réduite. On déduit alors $\mathrm{Rg}\, f=$. Déterminer le rang de f, une base et la dimension de son noyau et de son image.

Solution (exercice 17) Énoncé

1. On souhaite étudier dans cette question l'inversibilité de D_p. Avec la méthode du miroir on trouve sans difficulté que

$$\boxed{\mathrm{D}_3^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{D}_4^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}}.$$

On conjecture alors que D_p est inversible, et d'inverse :

$$\mathrm{D}_p^{-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1\\1&\ddots&&&0\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&1&0\end{pmatrix}.$$

Pour justifier cela, on effectue simplement le produit matriciel $\mathrm{D}_p\times\mathrm{D}_p^{-1}=\mathrm{D}_p^{-1}\times\mathrm{D}_p$, on constate qu'ils sont égaux à I_p.

2. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base d'un espace vectoriel E. On définit $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $f(e_i)=e_{i+1}$ pour $1\leqslant i\leqslant 3$ et $f(e_4)=e_1$.

2.1) Par définition, f envoie la base $\mathscr{B}$ sur $f(e_2,e_3,e_4,e_1)$ qui est encore une base, donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$

2.2) On obtient immédiatement

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2.3) On constate facilement que f^{-1} définie par

$$\forall i \in [\![2\,,4]\!],\ f^{-1}(e_i) = e_{i-1}, \quad f^{-1}(e_1) = e_4$$

définie une application linéaire qui est la réciproque de f. En effet, pour tout $i \in [\![1\,,4]\!]$,

$$f^{-1}\circ f(e_i) = \begin{cases} f^{-1}(e_{i+1}) = e_i & \text{si } i \in [\![1\,,3]\!], \\ f^{-1}(e_1) = e_4 & \text{si } i = 4. \end{cases}$$

Donc $f^{-1}\circ f(e_i) = e_i = \operatorname{Id}(e_i)$ pour tout $i \in [\![1\,,4]\!]$. De-même on vérifie que $f\circ f^{-1}(e_i) = e_i = \operatorname{Id}(e_i)$ si $i \in [\![1\,,4]\!]$. On déduit alors que $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = \operatorname{Id}$: soit donc $x \in \mathrm{E}$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ trois réels tels que $x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i$ et par linéarité

$$f^{-1}\circ f(x) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f^{-1}\circ f(e_i) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i = x = \operatorname{Id}(x),$$

et de-même $f\circ f^{-1}(x) = x$ pour tout x.

Donc $\boxed{f \text{ est inversible d'inverse } f^{-1}.}$

D'après le cours, A est alors inversible d'inverse

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{D}_4.}$$

On déduit alors en conséquence que D_4 est inversible d'inverse $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = \mathrm{A}$.

2.4) Pour généraliser, il suffirait alors de considérer $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base d'un espace vectoriel E. On définit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p-1$ et $f(e_p) = e_1$.

Solution (exercice 18) Énoncé Comme f^2 est non nul, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Montrons que pour ce x, $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est bien une base de E.
Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x) = 0$. Montrons que $\lambda = \mu = \nu = 0$.
En composant une fois par f, on obtient :

$$f\left(\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x)\right) = \lambda f(x) + \mu f^2(x) + \nu f^3(x) = f(0) = 0$$

en exploitant la linéarité de f. En utilisant ensuite les hypothèses, on déduit :

$$\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0.$$

On réapplique encore une fois f : on obtient dès lors $\lambda f^2(x) + \mu f^3(x) = 0$. Donc $\lambda f^2(x) = 0$, mais comme $f^2(x) \neq 0$ par hypothèse, il vient $\lambda = 0$.
On obtient alors : $\mu f^2(x) = 0$, puis $\mu = 0$ par le même argument. Enfin, d'après l'hypothèse de départ, $\lambda x = 0$ et comme $x \neq 0$ (sinon on aurait $f^2(x) = 0$), on déduit $\lambda = 0$. Ainsi, la famille $\left(x, f(x), f^2(x)\right)$ est libre.
De plus, elle est de cardinal 3, donc c'est une $\boxed{\text{base de E}}$.
Comme :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.x + 1.f(x) + 0.f^2(x) \\ f(f(x)) &= 0.x + 0.f(x) + 1.f^2(x) \\ f(f^2(x)) &= 0.x + 0.f(x) + 0.f^2(x), \end{aligned}$$

il vient alors : $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

Solution (exercice 19) Énoncé

1. 1.1) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0$, donc $g\circ f(x) = g(0) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$.
Soit $y \in \operatorname{Im}(g\circ f)$. Alors il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = g\circ f(x) = g(f(x))$. Donc y s'écrit comme une image par g, et $y \in \operatorname{Im} g$.
En conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g\circ f), \quad \operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im}(g).}$

1.2) Supposons que $g\circ f$ est un isomorphisme. Alors $g\circ f$ est injective et surjective. Donc $\operatorname{Ker}(g\circ f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$. Or, $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$, donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et f est bien injective.
On a également par surjectivité de $g\circ f$: $\operatorname{Im}(g\circ f) = \mathrm{G}$. Or $\mathrm{G} = \operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g \subset \mathrm{G}$ donc l'inclusion est une égalité et $\operatorname{Im} g = \mathrm{G}$, ainsi g est surjective.
En conclusion : $\boxed{f \text{ est injective et } g \text{ est surjective.}}$

2. Montrer que : $g\circ f = 0_{\mathscr{L}}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \iff \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $g\circ f = 0_{\mathscr{L}}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$, alors montrons que $y \in \operatorname{Ker} g$. Comme $y \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Donc $g(y) = g\circ f(x) = 0$ par hypothèse donc $y \in \operatorname{Ker} g$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$. Soit $x \in \mathrm{E}$, on calcule :

$$g\circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g}) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout x, nous avons bien montré : $g\circ f = 0_{\mathscr{L}}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.
En conclusion : $\boxed{g\circ f = 0_{\mathscr{L}}(\mathrm{E},\mathrm{F}) \iff \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g).}$