Chapitre # (AN) 7 Compléments d'intégration

Résumé & Plan

Ce chapitre complète celui d'intégration vu en début d'année (le Chapitre (AN) 2), en ajoutant notamment l'étude des intégrales à bornes variables, et les méthodes numériques pour approcher des intégrales.

L'année s'achève après ce chapitre.

— **Le saviez-vous ?**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

Cadre

Dans toute cette section, la notation $[a,b]$ désignera toujours un segment, avec $a,b\in\mathbb{R}$.

1.1. Généralités : rappels & compléments

Définition/Proposition 1 | Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle *intégrale de f sur le segment* $[a,b]$ le réel noté $\displaystyle\int_a^b f$ $\left(\text{ou encore } \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\textbf{(défi.)}}{=} [\mathrm{F}(x)]_a^b \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a),$$

(où F désigne **<u>une</u>** primitive de f).

On appelle *intégrande de* $\displaystyle\int_a^b f$ la fonction f.

- Remarquez que si $a=b$, alors avec les notations de la définition précédente, on a : $\displaystyle\int_a^a f=[\mathrm{F}]_a^a=\mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(a)=0$.
- Rappelons que la quantité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la primitive choisie. La définition de l'intégrale est donc bien posée (nous l'avions montré dans le Chapitre (AN) 2).

Proposition 1 | Propriétés de l'intégrale ♥

Soient I un intervalle, $(a,b)\in\mathrm{I}^2$ et $(f,g)\in(\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}))^2$. Alors :

1. **[Linéarité]** Pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a :
$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g.$$
2. **[Positivité]** Si $a\leqslant b$, alors : $f\geqslant 0 \implies \displaystyle\int_a^b f\geqslant 0$.
3. **[Croissance]** Si $a\leqslant b$, alors : $f\leqslant g \implies \displaystyle\int_a^b f\leqslant\int_a^b g$.
4. **[Stricte positivité]** Si $a\leqslant b$, et s'il existe $x_0\in[a,b]$ tel que $f(x_0)>0$, alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t>0.$$

5. **[Nullité]** Si $a \leqslant b$, alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \geqslant 0 \\ \textbf{(ii)} & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases} \implies f = 0.$$
6. **[Relation de Chasles]** Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $c \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$
7. **[Ordre des bornes]** Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, alors :
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

La propriété de croissance permet donc d'intégrer des inégalités, et plus généralement tout encadrement.

Exemple 1 Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

La relation de Chasles permet de calculer notamment des intégrales dont l'intégrande est définie par morceaux, voyons un exemple avec la valeur absolue.

Exemple 2 Calculer $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan(x)|\,\mathrm{d}x$.

Citons également deux propriétés parfois utiles dans les calculs, qui concernent le crochet.

Proposition 2 | Propriétés du crochet

Soient I un intervalle et $(a, b) \in \mathrm{I}^2$.
1. **[Linéarité]** Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$[\lambda \mathrm{F} + \mu \mathrm{G}]_a^b = \lambda\,[\mathrm{F}]_a^b + \mu\,[\mathrm{G}]_a^b.$$
2. **[Ordre des bornes]** Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors : $[\mathrm{F}]_a^b = -[\mathrm{F}]_b^a$.

Remarque 1 L'application qui associe à une fonction son crochet entre a et b est donc une forme linéaire sur les fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1 | Inégalité triangulaire

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors :
$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Preuve

On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. *Donc en intégrant entre* a *et* b, *on déduit :*
$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f| \iff \left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Exemple 3 Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -\pi \leqslant \int_{-1}^1 \arctan(2x) \times \sin^2 x\,\mathrm{d}x \leqslant \pi.$$

COMPARAISON SOMME—INTÉGRALE. Nous voyons une technique qui permet souvent d'étudier la nature de certaines suites, plus précisément des suites du type $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ où f est une fonction monotone, à l'aide d'une intégrale.

Méthode Comparaison série-intégrale pour $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$, f monotone

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou définie au moins sur un intervalle du type $[\![n_0, \infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
La méthode consiste à (par exemple dans le cas où f est **croissante**) :

- Écrire : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [k, k+1], \quad f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$.
- En intégrant entre k et $k+1$, on déduit :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k+1).$$
- Si l'on préfère, on peut aussi placer $f(k)$ au milieu, puis éventuellement appliquer le théorème d'encadrement pour obtenir $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(k)$:
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Si le calcul de l'intégrale est possible, cela permet donc de régler celui de $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(k)$. L'encadrement permet aussi de trouver des équivalents.

Remarque 2

- Le nom de « comparaison série-intégrale » apparaitra comme plus clair en 2ème année : cette terminologie s'explique par le fait qu'elle permette d'étudier certains types de suites que l'on appelle *série*.
- En première année, nous pourrions plutôt l'appeler « comparaison somme–intégrale ».

Exemple 4

- Utiliser la technique précédente pour montrer le résultat déjà établi dans le Chapitre (AN) 4 : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mathrm{H}_n = \infty$ où $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geqslant 1$. *(On commencera par encadrer la suite apparaissant dans la somme)*
- Utiliser l'encadrement précédent pour montrer que : $\mathrm{H}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

1.2. Lien entre primitive et intégrale (rappel)

Par définition de l'intégrale, il est nécessaire de connaître une primitive pour la calculer, il existe donc un fort lien entre les deux notions. Voyons lequel.

Théorème 2 | Relation fondamentale de l'analyse

Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :
$$\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a**, elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque 3

- Cette égalité est appelée assez pompeusement « relation fondamentale de l'analyse ». Pour notre définition de l'intégrale, elle est évidente. Mais pour d'autres définitions, il faut travailler pour l'établir.
- Rappelons que ce théorème permet notamment de calculer des primitives en passant par une intégrale (puis en utilisant les techniques de calculs qui leurs sont propres : intégration par parties et changement de variable).

Théorème 3 | Intégrale de la dérivée

Soient I un intervalle, $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve

Écrire une fonction comme intégrale de sa dérivée peut donner de précieux renseignements sur f si on en connaît certains sur f' : voyons un exemple.

Exemple 5 (Inégalité des accroissements finis) Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ avec $a < b$ et telle que f' soit bornée par $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$.

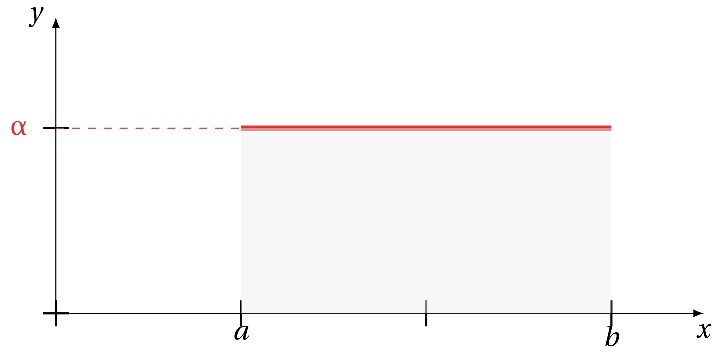
1. Montrer, en écrivant f comme intégrale de sa dérivée, que :
$$|f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{M}\,|b-a|.$$
2. Retrouver ce résultat en utilisant cette fois l'égalité des accroissements finis.

2. AIRE SOUS UNE COURBE & INTÉGRATION NUMÉRIQUE

La motivation première de l'introduction du calcul intégral fut celle du calcul d'aires, et de volumes (pour les intégrales doubles). Pour le moment nous n'avons pas encore réalisé cette interprétation (qui ne saute pas aux yeux avec notre définition faisant intervenir des primitives), c'est l'objectif de cette sous-section.

2.1. Sommes de RIEMANN

- Commençons avec un premier exemple : celui d'une fonction constante. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constante égale à $\alpha \in \mathbb{R}$, alors : $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\alpha$.



- Maintenant si f est constante par morceaux, alors avec les notations de la **??**, l'intégrale de f vaut :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f|_{]x_k,x_{k+1}[} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\alpha_k$$
où α_k désigne la valeur que prend le prolongement continue de f sur $[x_k, x_{k+1}]$. Cette quantité est donc une somme d'aires de rectangles.

Maintenant, dans le cas général, nous avons le théorème suivant.

Définition/Proposition 2 | Convergence des sommes de RIEMANN

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *somme de* RIEMANN *gauche* (*resp. droite*) ou *somme des rectangles gauche* (*resp. droite*) les quantités :

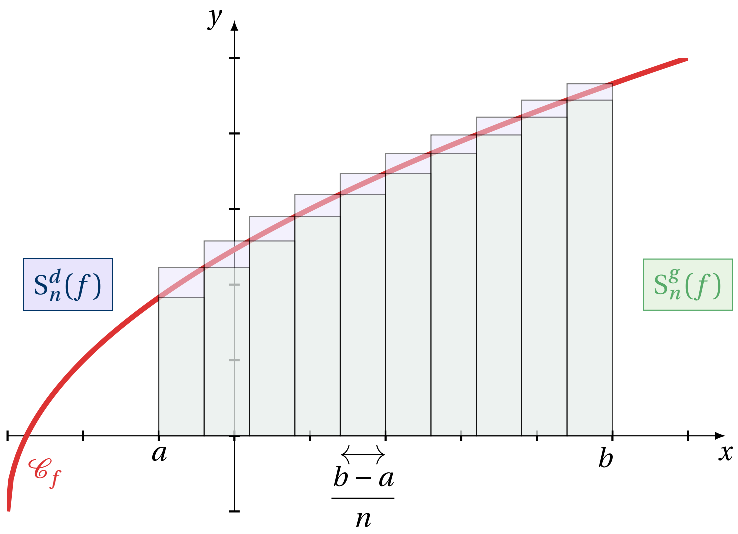
$$S_n^g(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right), \quad S_n^d(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

Alors : $\quad S_n^g(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f, \quad S_n^d(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f.$

Note | *En général, quand on parle de « somme de Riemann » tout court, on fait référence à $S_n^g(f)$*

Remarque 4

- Si on suppose en outre que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ (ce qui sera le cas dans la démonstration qui va suivre), alors on a la majoration de l'erreur suivante :
$$\left|\int_a^b f - S_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{[a,b]}|f'|,$$
où $S_n(f)$ désigne l'une ou l'autre des sommes $S_n^g(f), S_n^d(f)$.
- Les quantités $S_n^g(f)$ (*resp.* $S_n^d(f)$) correspondent à la somme des aires des rectangles verts (*resp.* bleus). Les points $a = x_0, \dots, x_n = b$ sont espacés d'un pas $\dfrac{b-a}{n}$ et « découpent » donc l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles de même largeur.



Méthode des rectangles à gauche et à droite

Par ailleurs, connaissant une expression de f, il est alors très facile d'en déduire une valeur approchée de son intégrale sur $[a,b]$ à l'aide d'un outil informatique.

Preuve *(Point clef — **Relation de Chasles, majoration d'intégrales, inégalité des accroissements finis**)*
La convergence dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^0$ est admise. Nous allons montrer la majoration de l'erreur dans le cas $\mathscr{C}^1$ et, par exemple, pour la somme des rectangles à gauche, ce qui suffira à prouver la convergence par théorème d'encadrement : en effet,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{[a,b]}|f'| = 0.$$

En notant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, et $M = \sup_{[a,b]}|f'|$. Cette borne supérieure existe puisque f' est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \left|\int_a^b f - S_n^g(f)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(f(t)-f(x_k))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)-f(x_k)\,\mathrm{d}t\right| \quad \textit{inégalités triangulaires pour les sommes} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|\,\mathrm{d}t \quad \textit{inégalités triangulaires pour les intégrales} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} M\,|t-x_k|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} M\left[\frac{(t-x_k)^2}{2}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M\frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Donc par théorème d'encadrement, nous obtenons :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b f - S_n^g(f)\right| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} S_n^g(f) = \int_a^b f.$$

La même convergence a lieu pour la somme à droite en changeant les bornes de la somme.

Preuve *(Dans le cas monotone et $[a,b] = [0,1]$)* *(Point clef — **Comparaison série-intégrale**)*
On propose une preuve dans un contexte simplifié, en supposant que f est monotone sur l'intervalle $[0,1]$. On souhaite établir que :

$$S_n^g(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \quad S_n^d(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Note | *La preuve qui va suivre fonctionne de la même façon sur n'importe quel intervalle $[a,b]$!*

Supposons par exemple que f est croissante, et soit $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$. On a :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad \frac{k}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{n} \overset{f \text{ croissante}}{\implies} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Dans la fin de la preuve précédente, on a aussi finalement montré que si f est croissante ; les rectangles à gauche sont « en-dessous » des rectangles à droite, ce qui se constate aisément sur un dessin.

Exemple 6 **(Sommes de RIEMANN)** Identifier les sommes ci-dessous comme des sommes de RIEMANN, et en déduire les valeurs données des limites.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \ln 2.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \frac{\pi}{4}.$

INTÉGRATION NUMÉRIQUE. Lorsque l'on ne sait pas calculer explicitement une intégrale, nous pouvons l'approcher à l'aide d'une somme de RIEMANN comme nous venons le voir. Avec les notations de Définition/Proposition 2, la quantité $S_n(f)$ pour n assez grand peut donc servir d'approximation de $\displaystyle\int_a^b f$. On en déduit alors le script Python suivant.

(Méthode des rectangles (gauche))

```python
def rectangle_RG(f, a, b, n):
    """
    Calcule la somme des rectangles gauche associée à f
    """
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        S += f(a+h*i)
    return S*h
```

(Méthode des rectangles (droite))

```python
def rectangle_RD(f, a, b, n):
    """
    Calcule la somme des rectangles droite associée à f
    """
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(1,n+1):
        S += f(a+h*i)
    return S*h
```

Par exemple,

```python
>>> rectangle_RG(lambda x:x**2, 0, 1, 10**3)
0.33283349999999995
>>> rectangle_RD(lambda x:x**2, 0, 1, 10**3)
0.33383349999999995
```

Ce que l'on peut retrouver par le calcul.

$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Remarque 5 Il existe beaucoup d'autres méthodes : celle du point milieu (méthode des rectangles où l'on choisit le milieu des intervalles comme hauteur), celle des trapèzes (les rectangles sont remplacés par des trapèzes), de SIMPSON (les rectangles sont des branches de paraboles). Une méthode sera d'autant meilleure qu'elle converge rapidement vers la bonne valeur théorique inconnue.

3. INTÉGRALES REMARQUABLES

Dans cette section, on se focalise sur l'étude de certaines intégrales particulières. Les deux premières sont des grands classiques.

3.1. Suites d'intégrales & Intégrales à paramètres

Méthode Étude d'une suite d'intégrales

Considérons une suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue pour tout } n.$$

En règle générale, dans ces exercices, il est bien sûr impossible de calculer explicitement l'intégrale pour étudier (u_n), on passe donc par le théorème de convergence monotone.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \int_a^b (f_{n+1}(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}t$. Ainsi, la monotonie de $(f_n(x))_n$ pour tout $x \in [a,b]$ donne la monotonie de (u_n) (c'est-à-dire le signe de $u_{n+1} - u_n$).
2. Il reste ensuite à montrer que (u_n) est majorée ou minorée. Cela se fait en encadrant $f_n(x)$.

Les résultats précédents s'appliquent aussi à des intégrales à « paramètre continu », c'est-à-dire

$$\mathrm{I} : \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \int_a^b f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x, \quad f_\lambda : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue pour tout } \lambda.$$

Exemple 7 **(Suite d'intégrales bornées)** Montrer que les suites $(\mathrm{I}_n), (\mathrm{J}_n)$ définies ci-dessous sont bornées. On rappelle que cela revient à trouver un réel M **indépendant de** n tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\mathrm{I}_n| \leqslant \mathrm{M}, \quad |\mathrm{J}_n| \leqslant \mathrm{M}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n \arctan(1-nx)\,\mathrm{d}x.$

Exemple 8 **(Suite d'intégrales)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x.$$

1. Vérifier que pour tout $y \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+y) \leqslant y$.

2. En déduire un encadrement de I_n.

3. Étudier la nature de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

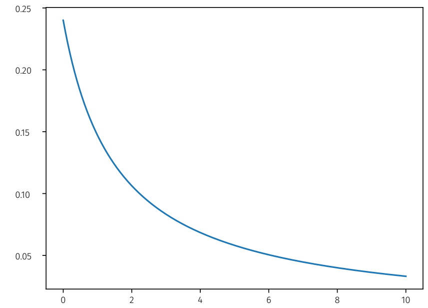
Exemple 9 **(Intégrale à paramètre)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On note $I(\lambda) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{t+\lambda}\,dt$.

1. Montrer que I est bien définie sur $\mathbb{R}^+$, et est décroissante.

2. En encadrant l'intégrale, montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} I(\lambda) = 0$.

Remarque 6 **(Tracé de I)** On peut aussi écrire une fonction Python d'en-tête `trace_I(a, b)` traçant la fonction I sur $[a, b]$, $a, b \geqslant 0$. On utilise par exemple une méthode des rectangles.

```python
def trace_I(a, b):
    X = np.linspace(a, b, 10**3)
    Y = []
    n = 10**3 # nombre de points de la méthode des rectangles
    for x in X:
        # éval de I(x)
        S = 0
        h = (2-1)/n
        for i in range(n):
            S += ma.log(1+i/n)/(1+i/n+x)
        Y.append(S*h)
    plt.plot(X, Y)
trace_I(0, 10)
```



3.2. Intégrales à borne(s) variable(s)

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux intégrales de fonctions dont une ou plusieurs bornes de l'intégrales dépendant d'une variable. Le théorème ci-dessous est clairement hors-programme, il faut donc uniquement en connaître la démarche de la preuve associée qui se retient en une phrase : introduire une primitive de l'intégrande.

Théorème 4 | Intégrale à deux bornes variables [H.P]
Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient par ailleurs $u, v : J \longrightarrow I$ deux fonctions dérivables sur J où J est un intervalle réel. Alors la fonction

- $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f$ est dérivable sur J et sa dérivée est donnée par :
- $\forall x \in J, \quad g'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f\right) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x).$

Preuve *(Point clef — **Introduire une primitive de l'intégrande**)*
Puisque f est continue, choisissons une primitive de f notée F.

Méthode Étude d'une intégrale à bornes variables

Soient I un intervalle, a un point de I et $f: \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient par ailleurs $u, v: \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ deux fonctions définies sur J où J est un intervalle réel. Pour étudier la dérivabilité de $x \in \mathrm{J} \longmapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f$, on :

1. introduit une primitive de f, notée F.
2. Alors : $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f = \mathrm{F} \circ v(x) - \mathrm{F} \circ u(x)$.
3. Justifier la dérivabilité et dériver à l'aide la formule de dérivation d'une composée.
4. On obtient *in fine* : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f\right) = f \circ v(x) v'(x) - f \circ u(x) u'(x)$ — cette formule ne doit pas être apprise par coeur, il faut savoir la retrouver en dérivant une composée.

Un point important est que le résultat ne dépend pas de F ; inutile donc de chercher à calculer F explicitement.

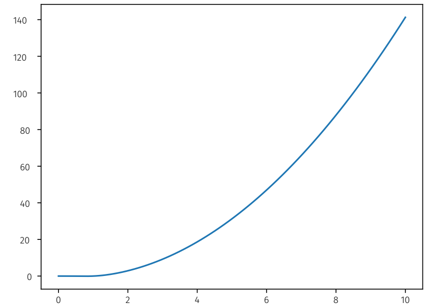
Exemple 10 **(Fonction d'une variable dépendant d'une intégrale)** Justifier que f, g sont dérivables, où f, g sont définies ci-dessous, puis calculer leur dérivée.

1. $f: x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire les variations de f.

2. $g: x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{x^2} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.

3. On peut aussi écrire une fonction Python d'en-tête `trace_g(a, b)`, utilisant l'une des fonctions Python `rectangle_RG` ou `rectangle_RD`, et traçant la fonction g sur $[a, b]$.

```python
def trace_g(a, b):
    X = np.linspace(a, b, 10**3)
    def g(x):
        return ma.atan(x**2)
    Y = [rectangle_RG(g, x, x**2, 10**3) for x in X]
    plt.plot(X, Y)
trace_g(0, 10)
```



4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la notion d'intégrale et les différentes propriétés de l'intégrale :
   - définition de l'intégrale ☐
   - linéarité et relation de Chasles ☐
   - savoir encadrer des intégrales ☐
   - positivité et croissance de l'intégrale ☐
   - fonction positive et intégrale nulle ☐
2. Savoir reconnaitre utiliser les sommes de Riemann pour calculer des sommes ☐
3. Savoir implémenter la méthode des rectangles ☐
4. Savoir étudier les familles d'intégrales, et les intégrales à bornes variables ☐

4.1. Études de fonctions définies par des intégrales

Exercice 1 | Solution Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, calculer f' et étudier les variations de f.

Exercice 2 | Solution Soit f la fonction définie par : $\quad f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de f.
3. À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3 | Solution On pose $f(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$. Étudier :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 | Solution Calculer : $\quad \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 | Solution Soit f la fonction définie par : $\quad \mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Ensemble de définition de G ?
2. Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.
3. Calculer G'. Conclusion ?

Exercice 6 | **Intégrale à paramètre – Extrait Agro-Véto** Solution Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie et calculer $f(0)$.
2. À l'aide des sommes de Riemann, écrire $f(x)$ comme une limite pour tout x, puis proposer un script permettant de retourner une valeur approchée de $f(x)$. Tracer alors la fonction f sur l'intervalle $[0,10]$.
3. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{\ln 2}{2}|x-y|$.
4. Montrer que f est continue bornée sur $\mathbb{R}$.

4.2. Études de suites définies par des intégrales

Exercice 7 | **Intégrales de Wallis** Solution Soit n un entier naturel, on pose alors :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. 1.1) Calculer I_0, I_1, I_2.
   1.2) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. 2.1) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n.$$
   2.2) En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on a
   $$\mathrm{I}_{2p} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} \times \frac{\pi}{2}$$
   $$\mathrm{I}_{2p+1} = \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p+1)}.$$
   2.3) Calculer $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. 3.1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad \dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-2}} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1$.
   3.2) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} = 1$ et en déduire que $\mathrm{I}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n-1}$.
   3.3) Utiliser le résultat de la question 2.2) pour en déduire un équivalent de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 | Solution On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Trouver une formule de récurrence.

Exercice 9 | Solution Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. Montrer que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
2. Trouver une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}.
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathrm{J}_n - \frac{1}{(n+1)e} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$
Trouver un équivalent simple de J_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 10 | **Intégrale au service d'un équivalent** Solution

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^n \ln(x)\,dx \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(x)dx.$
2. En déduire que : $\ln(n!) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n).$

Exercice 11 | Solution On considère la suite d'intégrales $\mathrm{J}_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\,dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$. Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.
2. Montrer que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quand n tend vers l'infini et calculer sa limite.
3. Montrer que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire sans calcul supplémentaire que : $\frac{1}{2}(\mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n+1}) \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \frac{1}{2}(\mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n-1}).$
4. Calculer la valeur de $\mathrm{J}_n + \mathrm{J}_{n+1}$ en fonction de n.
5. En déduire la limite de la suite $(n\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire un équivalent de J_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 12 | **Lemme de RIEMANN-LEBESGUE** Solution Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx\right) = 0.$$
Indication : On pourra commencer par une intégration par parties

4.3. Sommes de RIEMANN

Exercice 13 | Solution Calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathrm{S}_n$ quand :

1. $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
2. $\mathrm{S}_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
3. $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$
4. $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
5. $\mathrm{S}_n = \left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$
6. $\mathrm{S}_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{\frac{1}{2n}}.$

Solution (exercice 1) Énoncé

- Montrons que f est définie sur $\mathbb{R}$:
  - Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 2x$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction $g : t \longmapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues. Ainsi il existe une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
  - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien que : $[x, 2x] \subset \mathbb{R}$ ou $[2x, x] \subset \mathbb{R}$.
- Montrons que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(x)$ avec G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi sa primitive G est elle aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  - Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 2x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi par composée et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction f est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Calcul de sa dérivée : la fonction f est donc en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1)$.
- Variations de la fonction f : comme une exponentielle est toujours strictement positive, la dérivée est du signe de $2e^{-3x^2} - 1$. Or on a : $2e^{-3x^2} - 1 \leqslant 0 \iff x^2 \geq \dfrac{\ln 2}{3}$. On obtient ainsi le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{\ln 2}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{\ln 2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0

- Limites en $\pm\infty$:
  - Limite en $+\infty$: comme on peut supposer $x > 0$ car on regarde la limite en $+\infty$, on a :

    $$x \leqslant t \leqslant 2x \iff x^2 \leqslant t^2 \leqslant 4x^2 \iff -4x^2 \leqslant -t^2 \leqslant -x^2 \iff e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$$

    par composition par les fonctions carrée et inverse respectivement strictement croissante et décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et par multiplication par $-1 < 0$. On a donc
    - Les fonctions $t \longmapsto e^{-4x^2}$, $t \longmapsto e^{-t^2}$ et $t \longmapsto e^{-x^2}$ sont continues sur $[x, 2x]$.
    - $x \leqslant 2x$ car $x > 0$.
    - Pour tout $t \in [x, 2x]$: $e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$.

    Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on obtient que :

    $$\int_x^{2x} e^{-4x^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}\,dt$$

    $$\iff \quad xe^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-x^2}.$$

    On remarque alors que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-4x^2} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{X^{\frac{1}{2}}}{2e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = 4x^2$. De même, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{X^{\frac{1}{2}}}{e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = x^2$. Ainsi on a :
    - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-4x^2} = 0 = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-x^2}$
    - $xe^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-x^2}$. Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$. Et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
  - Limite en $-\infty$:

    Comme on a : $x < 0$ car on regarde la limite en $-\infty$, on a :

    $$2x \leqslant t \leqslant x \iff x^2 \leqslant t^2 \leqslant 4x^2 \iff -4x^2 \leqslant -t^2 \leqslant -x^2 \iff e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$$

    par composition par les fonctions carrée et inverse toutes les deux strictement décroissantes sur $\mathbb{R}^{-\star}$ et par multiplication par $-1 < 0$. On a donc
    - Les fonctions $t \longmapsto e^{-4x^2}$, $t \longmapsto e^{-t^2}$ et $t \longmapsto e^{-x^2}$ sont continues sur $[2x, x]$.
    - $2x \leqslant x$ car $x < 0$.
    - Pour tout $t \in [2x, x]$: $e^{-4x^2} \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$.

    Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on obtient que

    $$\int_{2x}^{x} e^{-4x^2}\,dt \leqslant -f(x) \leqslant \int_{2x}^{x} e^{-x^2}\,dt$$

    $$\iff -xe^{-4x^2} \leqslant -f(x) \leqslant -xe^{-x^2} \iff xe^{-x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-4x^2}.$$

    On remarque alors que : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^{-4x^2} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{X^{\frac{1}{2}}}{2e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = 4x^2$. De même, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{X^{\frac{1}{2}}}{e^X} = 0$ par croissance comparée et en ayant posé $X = x^2$. Ainsi on a :
    - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^{-4x^2} = 0 = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} xe^{-x^2}$
    - $xe^{-x^2} \leqslant f(x) \leqslant xe^{-4x^2}$. Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on

obtient que : $\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)=0$. Et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. - Les fonctions $x\longmapsto x$ et $x\longmapsto 2x$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction $g : t\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions continues car $1+t^4>0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif.
   - Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a bien que : $[x,2x]\subset\mathbb{R}$ ou $[2x,x]\subset\mathbb{R}$.

   Ainsi on a : $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}.}$
   - Le domaine de définition est bien centré en 0.
   - Soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(-x)=\displaystyle\int_{-x}^{-2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}$.

     On pose alors le changement de variable suivant :
     $$u=-t,\quad \mathrm{d}u=-\mathrm{d}t,\quad \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}=\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+1}}.$$
     On a $t=-x\implies u=x$ et $t=-2x\implies u=2x$. De plus :
     - ◇ $\varphi : t\longmapsto -t$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-x,-2x]$.
     - ◇ $u\longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{u^4+1}}$ est bien continue sur $[2x,x]$.

     Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on a : $f(-x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+1}}=-\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^4+1}}=-f(x)$ car la variable d'intégration est muette.

   Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$ et il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.

2. - Si on note G la primitive de la fonction $g : t\longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ qui existe bien sur $\mathbb{R}$ car g est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\mathrm{G}(2x)-\mathrm{G}(x)$.
   - De plus la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc sa primitive G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi elle est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables.
   - De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=2\mathrm{G}'(2x)-\mathrm{G}'(x)=2g(2x)-g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{16x^4+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$. On met alors tout au même dénominateur puis on utilise la quantité conjuguée et on obtient alors que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{3(1-2x^2)(1+2x^2)}{\sqrt{16x^4+1}\sqrt{x^4+1}(\sqrt{16x^4+1}+\sqrt{x^4+1})}$. Cette dérivée est alors du signe de $1-2x^2$ car tous les autres termes sont positifs. Ainsi on obtient le tableau des variations suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

3. - Encadrement de la fonction f : on remarque que, si $x\geq 0$: $x\leqslant t\leqslant 2x\iff \dfrac{1}{\sqrt{16x^4+1}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ en utilisant le fait que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi, on a donc :
     - ◇ Les fonctions $t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{16x^4+1}}$, $t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ et $t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ sont continues sur $[x,2x]$.
     - ◇ $x\leqslant 2x$ car $x\geq 0$.
     - ◇ Pour tout $t\in[x,2x]$: $\dfrac{1}{\sqrt{16x^4+1}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x^4+1}}$.

     Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on obtient que : $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.
   - On a ainsi
     - ◇ Pour tout $x\geq 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$.
     - ◇ $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{\sqrt{16x^4+1}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}=0$ en écrivant que : $\dfrac{x}{\sqrt{16x^4+1}}=\dfrac{x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}$ puis par composée, somme et quotient de limites.

     Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on a : $\boxed{\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
   - Par imparité de la fonction, on obtient aussi que $\boxed{\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=0}$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

Solution (exercice 3) Énoncé On pose g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Étude du domaine de définition de g.

- ⋄ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Étude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme produit et composée de fonctions continues. Étude de la continuité à droite en 0 : On a par propriété sur les quotient, composée et produit de limites que : $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} f(t) = 0$. Ainsi f est continue à droite en 0. En particulier, la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi il existe bien une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ si on prend la primitive qui s'annule en 0.
- ⋄ Ainsi, on a que $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ et ainsi la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

- Étude de la limite de g en 0^+ : on remarque que pour tout $x > 0$, on a : $g(x) = \dfrac{F(x)}{x}$. Or $F(0) = 0$ et ainsi on a pour tout $x > 0$: $g(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$. Ainsi g se met sous la forme du taux d'accroissement à droite en 0 de F. Il nous faut donc étudier la dérivabilité à droite en 0 de F. Mais on a montré que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc sa primitive F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et en particulier elle est bien dérivable à droite en 0. Ainsi la limite de g à droite en 0 existe et on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} g(x) = F'(0)$. Or on a : $F' = f$ ainsi on obtient que : $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} g(x) = f(0) = 0.}$

Solution (exercice 4) Énoncé

- On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien que la fonction f est continue sur $[1, x]$.
- On définit de plus la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t^2}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues et ainsi elle admet bien une primitive G sur $\mathbb{R}$, primitive qui est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = G(x) - G(1)$.
- On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $h(x) = \dfrac{f(x)}{x-1}$. On remarque alors que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $h(x) = \dfrac{G(x) - G(1)}{x-1}$ ce qui correspond au taux d'accroissement de la fonction G en 1.
- Pour calculer la limite de h en 1, il faut donc étudier la dérivabilité de la fonction G en 1. Or la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi elle est en particulier dérivable en 1. Ainsi la limite de h en 1 existe et vaut $G'(1) = g(1) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow 1} h(x) = \dfrac{1}{2}.}$

Solution (exercice 5) Énoncé

1. On pose la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$. On a :
   - La fonction $x \longmapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$. Ainsi le domaine de définition de G est déjà forcément inclus dans $\mathbb{R}^\star$.
   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme et quotient de fonctions continues.
   - Comme on veut que pour tout $x \in \mathscr{D}_G$: $\left[\dfrac{1}{x}, x\right] \subset \mathbb{R}^{+\star}$ ou $\left[x, \dfrac{1}{x}\right] \subset \mathbb{R}^{+\star}$, on doit imposer que $x > 0$.

   Ainsi, on obtient que : $\boxed{\mathscr{D}_G = \mathbb{R}^{+\star}.}$
2. - La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ainsi il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^{+\star}$. De plus cette primitive est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
   - On a alors pour tout $x > 0$: $G(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   - $\boxed{\text{La fonction G est alors de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+\star}}$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
3. - Comme la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$, elle est en particulier dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
   - Et pour tout $x > 0$, on a : $G'(x) = F'(x) + \dfrac{1}{x^2}F'\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) + \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{-\ln x}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\ln x}{1+x^2} - \dfrac{\ln x}{1+x^2} = 0.$
   - Comme la dérivée est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+\star}$, la fonction G est donc constante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. En prenant par exemple $x = 1$, on a : $G(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\,dt = 0$. Et ainsi pour tout $x > 0$: $G(x) = 0$.

   : $\boxed{\text{La fonction G est la fonction nulle.}}$

Solution (exercice 6) Énoncé

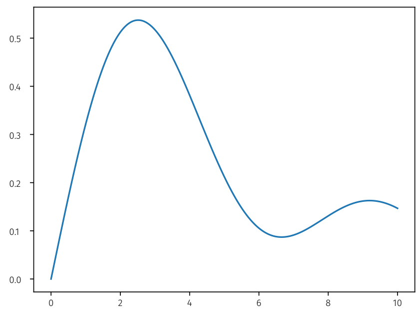
1. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\sin(tx)}{1+t^2}$ est continue, la fonction f est bien définie. De plus,
$$f(0) = \int_0^1 0 = \boxed{0}.$$
2. On peut écrire que :
$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{xk}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$
   On déduit alors le script suivant.
```
def g(t, x):
```

```
    return ma.sin(t*x)/(1+t**2)

def f(x):
    """
    retourne une approximation de f(x) suivant la méthode \
    ↪ des rectangles à gauche
    """
    a = 0
    b = 1
    n = 10**3
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        S += g(a+h*i, x)
    return S*h
```

Ensuite, on trace.

```
X = np.linspace(0, 10, 10**3)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
```



3. Constatons déjà que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'existence d'un $c \in]a, b[$ (puisque sin est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$) vérifiant :

$$|\sin(a) - \sin(b)| = |\cos(c)|\,|b-a|,$$

donc finalement on a montré que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |\sin(a) - \sin(b)| \leqslant |b-a|. \quad (\star)$$

Soient x, y deux réels. Alors

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,|\sin(tx)-\sin(ty)|\,dt \\ &\overset{(\star)}{\leqslant} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,|tx-ty|\,dt \\ &\leqslant |x-y| \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}|x-y|\;\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1.\end{aligned}$$

Finalement, on a établi :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\ln 2}{2}|x-y|}.$$

4. Vérifions par exemple la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (x_n) telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Montrons que $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |f(x_n) - f(a)| \leqslant \frac{\ln 2}{2}|x_n - a|,$$

puisque $|x_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, le théorème d'encadrement permet alors de conclure : $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$. Donc f est continue en a pour tout a, donc est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 |\sin(tx)|\frac{dt}{1+t^2} \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est bornée.}}$

Solution (exercice 7) Énoncé

1. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, I_n existe bien.

1.1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

1.2) Étude de la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t)-1)\,dt.$$

On utilise alors le théorème de positivité de l'intégrale pour conclure. On a en effet :

- $t \longmapsto \sin^n(t)(\sin(t)-1)$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$
- Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin^n(t) \geq 0$ et $\sin(t) \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\quad \sin^n(t)(\sin(t)-1) \leqslant 0$.

Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, on obtient :

$$\mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n \leqslant 0 \iff \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n.$$

Ainsi la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrons que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 : soit $n \in \mathbb{N}$, on utilise encore le théorème de positivité de l'intégrale :

- $t \longmapsto \sin^n(t)$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
- $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
- Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin^n(t) \geq 0$.

Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale, on obtient : $\mathrm{I}_n \geq 0$. Ainsi, on vient bien de montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. La suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi décroissante et minorée par 0, d'après le théorème sur les suites monotones, elle est donc convergente. On peut aussi remarquer que le théorème de séparation permet aussi de montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a même : $\mathrm{I}_n > 0$. Vérifions cela :

- $f_n : t \longmapsto \sin^n(t)$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
- $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
- Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin^n(t) \geq 0$.
- $f_n \not\equiv 0$.

Ainsi, d'après le théorème de séparation de l'intégrale, on obtient : $\boxed{\mathrm{I}_n > 0}$. Ceci servira dans la suite.

2. **2.1)** Dès que l'on veut une relation de récurrence sur une suite définie par une intégrale, il faut penser à utiliser une intégration par parties. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a ici :

$$\mathrm{I}_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{I}_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

On fait alors une intégration par parties sur le deuxième terme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$ en essayant de faire apparaître I_{n+2}.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos t\sin^n(t))}_{:=v'(t)}\underbrace{\cos(t)}_{:=u(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)(-\sin t)\,\mathrm{d}t + \left[\frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1}\times\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{1}{n+1}\mathrm{I}_{n+2} + 0.$$

$\sin^{n+1}$, cos sont $\mathscr{C}^1$

Ainsi, on obtient au final :

$$\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{n+1}\mathrm{I}_{n+2} \iff \frac{n+2}{n+1}\mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{I}_n \iff \boxed{(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n}.$$

2.2) A faire par récurrence. Il faut aussi savoir retrouver ces formules tout seul, sans qu'elles soient données, par itération de la formule de récurrence démontrée ci-dessus. De plus, il faut aussi savoir obtenir ces formules sous forme factorielle. On le fait pour I_{2p}. L'idée est toujours la même : on multiplie les nombres impairs par tous les nombres pairs manquant afin de faire apparaître une factorielle :

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2p)}$$
$$= \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\times(2p-2)\times(2p-1)\times(2p)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2p)\times2\times4\times6\times\cdots\times(2p)}$$
$$= \frac{(2p)!}{(2\times4\times6\times\cdots\times(2p))^2}$$

Ensuite, il reste à faire apparaître des factorielles au dénominateur aussi. Ici, l'idée est d'utiliser le fait que tous les termes sont pairs :

$$2\times4\times6\times\cdots\times(2p) = (2.1)\times(2.2)\times(2.3)\times\cdots\times(2.p) = 2^p\times(1\times2\times3\times\cdots\times p) = 2^p\times(p)!.$$

Ainsi, au final, on obtient :

$$\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2p)} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}.$$

Puis, on obtient alors : $\mathrm{I}_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\times(p!)^2}\times\dfrac{\pi}{2}$.

2.3) Ici il faut utiliser les deux formules démontrées précédemment en distinguant deux cas : n pair et n impair :

- Cas n pair $n = 2p$, on obtient :

$$n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$$
$$= (2p)\mathrm{I}_{2p}\mathrm{I}_{2p-1}$$

$$= 2p \times \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p-2)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}$$
$$= (2p)\times\frac{1}{2p}\times\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a : $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ dans le cas n pair.

- Cas n impair $n = 2p+1$:

$$n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1}$$
$$= (2p+1)\mathrm{I}_{2p+1}\mathrm{I}_{2p}$$
$$= (2p+1)\times\frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p+1)}\,\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2p-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2p)}\times\frac{\pi}{2}$$
$$= (2p+1)\times\frac{1}{2p+1}\times\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a : $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ dans le cas n impair.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient que : $\boxed{n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{\pi}{2}}$.

3. 3.1) On peut tout de suite commencer par remarquer que l'on peut bien diviser par I_{n-2} et I_{n-1} car on a démontré que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathrm{I}_n > 0$. On sait de plus que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, ainsi, on a :

$$\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_{n-2}.$$

La première inégalité donne, en divisant des deux côtés par $\mathrm{I}_{n-1} > 0$: $\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \Longrightarrow \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1$. La deuxième inégalité donne en passant à l'inverse, les deux termes étant strictement positifs : $\frac{1}{\mathrm{I}_{n-2}} \leqslant \frac{1}{\mathrm{I}_{n-1}}$. Puis en multipliant par $\mathrm{I}_n > 0$, on obtient bien que : $\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-2}} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}}$. On a bien obtenu l'inégalité voulue, à savoir :

$$\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-2}} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1.$$

3.2) On connaît la valeur de $\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-2}}$ car la relation de récurrence obtenue à la question 2 donne le lien entre I_n et I_{n-2}. On obtient ainsi : $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et ainsi : $\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$. On obtient donc :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} \leqslant 1.$$

Ainsi, on a, en utilisant le théorème des monômes de plus haut degré :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n-1}{n} = 1 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} 1.$$

Le théorème d'encadrement assure alors que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n-1}} = 1$. Ce qui est équivalent au fait que : $\mathrm{I}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n-1}$.

3.3) On peut toujours multiplier des équivalents. Ainsi, comme on sait que : $\mathrm{I}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n-1}$, on obtient : $n\mathrm{I}_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} n\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{I}_n$. On peut alors utiliser la relation : $n\mathrm{I}_n\mathrm{I}_{n-1} = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que : $n\mathrm{I}_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$. Puis, en divisant par n et en passant à la racine carrée (pour rappel : on ne peut pas composer des équivalents sauf pour des puissances, donc on peut passer à la racine carrée), on obtient :

$$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

Solution (exercice 8) Énoncé

1.
- Montrons que la suite est bien définie. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $x\longmapsto x^n\sin(\pi x)$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale I_n existe. Ainsi la suite est bien définie.
- Encadrement de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-1\leqslant\sin(\pi x)\leqslant 1$ et comme $x\in[0,1]$, on a : $x^n\geq 0$ et ainsi, on obtient que : $-x^n\leqslant x^n\sin(\pi x)\leqslant x^n$.
  - Les fonctions $x\longmapsto -x^n$, $x\longmapsto x^n\sin(\pi x)$ et $x\longmapsto x^n$ sont continues sur $[0,1]$.
  - $0\leqslant 1$.
  - Pour tout $x\in[0,1]$, $-x^n\leqslant x^n\sin(\pi x)\leqslant x^n$.

  On a ainsi, d'après le théorème de croissance de l'intégrale :
$$\int_0^1 -x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \iff \left[-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \left[-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$$
$$\iff -\frac{1}{n+1}\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$
- Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{n+1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on obtient que la suite converge et que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{I}_n = 0$.

2.
- $\mathrm{I}_0 = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \boxed{\frac{-2}{\pi}}$.
- $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 x\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$. Pour effectuer le calcul, on effectue une intégration

par parties.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \int_0^1 \underbrace{x}_{:=u(x)} \underbrace{\sin(\pi x)}_{:=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)\,\mathrm{d}x + \left[-\frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 \qquad x \mapsto x,\ x \mapsto -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \text{ sont } \mathscr{C}^1 \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \left[-\frac{x\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{\pi}}.
\end{aligned}$$

3. Dès que l'on veut une relation de récurrence pour une suite définie par une intégrale, on fait une intégration par parties. Soit $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_0^1 \underbrace{x^n}_{:=u(x)} \underbrace{\sin(\pi x)}_{:=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 n x^{n-1}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x + \left[-\frac{x^n\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 \qquad x \mapsto x^n,\ x \mapsto -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \text{ sont } \mathscr{C}^1 \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Pour retomber sur l'intégrale de l'énoncé, nous devons alors refaire une intégration par parties.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n-1}\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \underbrace{x^{n-1}}_{:=u(x)} \underbrace{\cos(\pi x)}_{:=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^1 (n-1)x^{n-2}\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x + \left[\frac{x^{n-1}\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 \qquad x \mapsto x^{n-1},\ x \mapsto \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) \text{ sont } \mathscr{C}^1 \\
&= -\frac{n-1}{\pi}\mathrm{I}_{n-2} + 0.
\end{aligned}$$

En combinant les deux égalités, on trouve alors :

$$\boxed{\mathrm{I}_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2}\mathrm{I}_{n-2}}.$$

Ainsi on a bien trouvé une relation de récurrence qui nous permettrait de calculer I_n en fonction de I_1 si n impair ou I_0 si n pair.

Solution (exercice 9) Énoncé

1.
- Montrons que la suite est bien définie : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La fonction f_n : $x \longmapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée et produit de fonctions continues. Donc J_n existe et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est bien définie.
- Pour montrer en même temps que la suite est convergente et trouver sa limite, on utilise le théorème d'encadrement. Ainsi on commence par encadrer l'intégrale, et pour cela, on trouve un encadrement de la fonction à l'intérieure de l'intégrale. On a :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff x^n\mathrm{e}^{-1} \leqslant f_n(x) \leqslant x^n.$$

Ici on a utilisé le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et le fait que $x^n > 0$. D'après le théorème de croissance de l'intégrale, on a donc :

$$\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \quad\iff\quad \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par propriété sur les quotients de limites. Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathrm{J}_n = 0}$.

2. Dès que l'on cherche une relation de récurrence avec une suite définie par une intégrale, il faut penser à faire une ou plusieurs intégrations par partie. On a $\mathrm{J}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+1} &= \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{:=u(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{:=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 (n+1)x^n(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x + \left[x^{n+1}(-\mathrm{e}^{-x})\right]_0^1 \qquad x \mapsto x^{n+1},\ x \mapsto -\mathrm{e}^{-x} \text{ sont } \mathscr{C}^1 \\
&= (n+1)\mathrm{J}_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{\mathrm{J}_{n+1} = (n+1)\mathrm{J}_n - \frac{1}{\mathrm{e}}}$.

3. D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{J}_n - \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} = \frac{\mathrm{J}_{n+1}}{n+1}$. On peut alors utiliser l'encadrement obtenu dans la première question et on a : $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+2} \leqslant \mathrm{J}_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$. Comme $n+1 > 0$, on obtient alors que :

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+2} \leqslant \frac{\mathrm{J}_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

Comme de plus, on a : $0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n+2}$, on a donc bien : $0 \leqslant \frac{\mathrm{J}_{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$, soit en remplaçant avec J_n : $\boxed{0 \leqslant \mathrm{J}_n - \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+2}}$, ce qui est bien le résultat demandé. L'inégalité démontrée ci-dessus est équivalente à :

$$\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\mathrm{e}} \iff 1 \leqslant \frac{\mathrm{J}_n}{\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}}} \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}}{n+2}.$$

Or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 1 = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{e}}{n+2}\right) = 1$ par propriété sur les quotients de limites.

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\mathrm{J}_n}{\frac{1}{(n+1)\mathrm{e}}} = 1$.

On a donc : $J_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{e(n+1)}$, soit $\boxed{J_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{en}}$.

Solution (exercice 10) Énoncé

1. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad \ln(k) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(k+1).$$

Donc en intégrant entre k et $k+1$:

$$\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(x)\,dx \leqslant \ln(k+1).$$

Sommons entre $k=1$ et $k=n$:

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^n \ln(k+1).$$

Puis par propriété du logarithme et relation de CHASLES,

$$\ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx \leqslant \ln((n+1)!).$$

On peut ensuite remettre le terme souhaité au milieu :

$$\boxed{\int_1^n \ln(x)\,dx \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1} \ln(x)\,dx.}$$

2. On sait qu'une primitive du logarithme est $x \longmapsto x\ln(x) - x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc

$$[x\ln(x)-x]_1^n \leqslant \ln(n!) \leqslant [x\ln(x)-x]_1^{n+1}.$$

D'où, après calculs :

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1.$$

Et enfin, en mettant $n\ln n$ en facteur :

$$1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n\ln n} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \leqslant \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} - \frac{n}{\ln n}. \quad (\star)$$

Mais

$$\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Le théorème d'encadrement dans $(\star)$ permet alors de conclure :

$$\boxed{\ln(n!) \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln(n)}.$$

Solution (exercice 11) Énoncé

1. - La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme somme et quotient de fonctions continues. Ainsi l'intégrale I existe. De même, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme somme et quotient de fonctions continues. Ainsi l'intégrale J_0 existe.
   - On remarque que pour tout $x \in [0,1]$: $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x+1}$. Ainsi en intégrant cette égalité, les 3 fonctions étant bien continues et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient que : $J_0 = \displaystyle\int_0^1 dx - I$.
   - Calcul de I : on reconnaît une primitive usuelle de la forme $\dfrac{u'}{u}$ et ainsi on obtient que : $I = [\ln|1+e^x|]_0^1 = \boxed{\ln 2 - \ln(1+e)}$.
   - Calcul de J_0 : On obtient alors que $\boxed{J_0 = 1 - \ln 2 + \ln(1+e)}$.
2. - Montrons que la suite est bien définie. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La fonction f_n : $x \longmapsto \dfrac{e^{-nx}}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues. Donc J_n existe et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite est bien définie.
   - Pour montrer en même temps que la suite est convergente et trouver sa limite, on utilise pour cela le théorème d'encadrement. Ainsi on commence par encadrer l'intégrale en utilisant le théorème de croissance.

   $$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 2 \leqslant e^x + 1 \leqslant e + 1$$
   $$\iff \frac{1}{e+1} \leqslant \frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{2} \iff \frac{e^{-nx}}{e+1} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{e^{-nx}}{2}.$$

   Ici on a utilisé le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et le fait que $e^{-nx} > 0$. On a donc :
     - ◇ Les fonctions f_n, $x \longmapsto \dfrac{e^{-nx}}{e+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{e^{-nx}}{2}$ sont continues sur $[0,1]$.
     - ◇ $0 \leqslant 1$.
     - ◇ Pour tout $x \in [0,1]$: $\dfrac{e^{-nx}}{e+1} \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{e^{-nx}}{2}$.

   Ainsi d'après le théorème de croissance de l'intégrale, on a :

   $$\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e+1}\,dx \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{2}\,dx \iff \frac{1-e^{-n}}{n(e+1)} \leqslant J_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{2n}.$$

   Il reste à utiliser le théorème d'encadrement : puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n(e+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2n} = 0$, il vient alors $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$.
3. Pour étudier la monotonie d'une suite définie par récurrence, on calcule toujours $J_{n+1} - J_n$ et on étudie son signe en utilisant le théorème de positivité de l'intégrale.

   Ainsi on a : $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{e^x+1}\,dx$. De plus comme une exponentielle est toujours strictement positive, on sait que $e^{-nx} > 0$ et que $e^x + 1 > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs. Ainsi il reste à étudier le signe de $e^{-x} - 1$. Or on a : $e^{-x} - 1 < 0 \iff e^{-x} < 1 \iff -x < 0 \iff x > 0$ en utilisant le fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Or on est sur $[0,1]$ donc on a : $e^{-x}-1 \leqslant 0$. On a donc :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{e^x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues.
- $0 \leqslant 1$.
- Pour tout $x \in [0,1]$: $\dfrac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{e^x+1} \leqslant 0$.

Ainsi d'après le théorème de négativité de l'intégrale, on obtient que :

$$J_{n+1} - J_n \leqslant 0 \iff J_{n+1} \leqslant J_n.$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite est bien décroissante}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme la suite est décroissante, on a : $J_{n+1} \leqslant J_n \leqslant J_{n-1}$. Et ainsi, on a :

$$J_{n+1} + J_n \leqslant 2J_n \leqslant J_n + J_{n-1} \iff \boxed{\frac{1}{2}(J_{n+1}+J_n) \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{2}(J_n + J_{n-1})}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de l'intégrale que :

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}+e^{-nx}}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx-x}(1+e^x)}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}\,dx.$$

Et on sait alors calculer cette intégrale et on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n + J_{n+1} = \frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}.$$

5. On utilise ici les deux dernières questions. On obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\frac{1-e^{-(n+1)}}{2(n+1)} \leqslant J_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{2n} \iff \frac{n(1-e^{-(n+1)})}{2(n+1)} \leqslant J_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{2}$$

car $n > 0$. On utilise alors le théorème d'encadrement et on a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\dfrac{n(1-e^{-(n+1)})}{2(n+1)} \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{2}$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-e^{-(n+1)})}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{2} = \frac{1}{2}$ par propriété sur les composées, sommes, produit et quotient de limites.

Ainsi d'après le théorème d'encadrement, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} nJ_n = \frac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{J_n}{\frac{1}{2n}} = 1$$

et donc : $\boxed{J_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$.

Solution (exercice 12) Énoncé Montrons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx\right) = 0$ pour f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.

- Existence de l'intégrale : la fonction $x \longmapsto f(x)\cos(n\pi x)$ est continue sur $[0,1]$ comme composée et produit de fonctions continues car la fonction f est continue sur $[0,1]$ par hypothèse. Ainsi l'intégrale existe bien.
- Intégration par parties. On écrit puisque $x \longmapsto \dfrac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$ et f sont $\mathscr{C}^1$:

$$\int_0^1 \underbrace{f(x)}_{\partial}\underbrace{\cos(n\pi x)}_{\int}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\sin(n\pi x)\,dx + 0$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\sin(n\pi x)\,dx.$$

- Valeur absolue et intégrale : on a $0 \leqslant 1$, donc :

$$\left|\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx\right| = \left|-\frac{1}{n\pi}\int_0^1 f'(x)\sin(n\pi x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{n\pi}\int_0^1 |f'(x)|\,|\sin(n\pi x)|\,dx$$

par inégalité triangulaire. On a donc puisque $|\sin| \leqslant 1$:

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{n\pi}\int_0^1 |f'(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc par théorème d'encadrement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx\right) = 0}$.

Solution (exercice 13) Énoncé On rappelle l'objectif principal de la méthode : faire apparaitre « du $\dfrac{k}{n}$ » (99 % des cas) ou plus généralement « du $a + k\dfrac{b-a}{n}$ » (1 % des cas).

1.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$.
- On pose alors $f : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de RIEMANN, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Pour calculer l'intégrale, on utilise la méthode lorsque l'on a un polynôme de degré sur un polynôme de degré 2 qui est ici de discriminant strictement négatif et on obtient que : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{4}}$.

2.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\displaystyle S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$.
- On pose alors $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de RIEMANN, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}.$$

3.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\displaystyle S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$. On pose alors pour

tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\quad \mathrm{T}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$.

- On pose alors $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de RIEMANN, on a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{T}_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Pour calculer l'intégrale, on reconnaît une primitive usuelle et ainsi on obtient que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{T}_n = \dfrac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$.
- Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{S}_n = \dfrac{\mathrm{T}_n}{\sqrt{n}}$, on a par propriété sur le quotient de limite que : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{S}_n = 0}$.

4. - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\quad \mathrm{S}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
- On pose alors $f : x \longmapsto x\sin(\pi x)$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de RIEMANN, on a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{S}_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Pour calculer l'intégrale, on utilise une intégration par parties et on obtient que : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{\pi}}$.

5. - On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{T}_n = \ln(\mathrm{S}_n)$: le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right).$$
On fait alors un changement de variable pour se ramener à une somme de 1 à n qui va nous permettre ainsi d'appliquer le théorème de RIEMANN à la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. On pose ainsi $j = k - n$ et on obtient que :
$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{j+n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$
- On pose alors $f : x \longmapsto \ln(1+x)$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de RIEMANN, on a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{T}_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1.$$
- Comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\mathrm{T}_n = \ln(\mathrm{S}_n) \iff \mathrm{S}_n = \mathrm{e}^{\mathrm{T}_n}$, on obtient par propriété sur la composition de limite que : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{S}_n = \mathrm{e}^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{\mathrm{e}}}$.

6. - On commence par transformer l'expression. Il faut donc transformer un produit en somme et ainsi une idée assez classique est de poser pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{T}_n = \ln(\mathrm{S}_n)$: le passage au logarithme népérien permet de transformer un produit en somme. On obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$\mathrm{T}_n = \frac{1}{2n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+n)\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k+n) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n)$$
$$= \frac{\ln n}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2}.$$
On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{V}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{2}$ et on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{T}_n = \dfrac{\ln n}{2} + \mathrm{V}_n$. On peut alors appliquer le théorème de RIEMANN à la suite $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
- On pose alors $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{2}$. Cette fonction est bien continue sur $[0,1]$. Ainsi d'après le théorème de RIEMANN, on a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{V}_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}$$
en utilisant la primitive de la fonction logarithme népérien.
- Comme on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\mathrm{T}_n = \dfrac{\ln n}{2} + \mathrm{V}_n$, on obtient que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{T}_n = +\infty$ par propriété sur les sommes et composée de limites. Puis comme on a aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\mathrm{T}_n = \ln(\mathrm{S}_n) \iff \mathrm{S}_n = \mathrm{e}^{\mathrm{T}_n}$, on obtient par propriété sur la composée de limite que $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\mathrm{S}_n = +\infty}$.