Programme de colles
du 27 au 31/5/2024

- Cette semaine de rentrée : 1 question de cours en Maths.

1. [MATHS] VARIABLES ALÉATOIRES

Attention

- Quelques généralités sur les variables aléatoires ont été développées en début de chapitre (par exemple la question de cours 1), mais les exercices resteront dans le cadre de variables aléatoires **finies**.
- J'ai présenté déjà une première fois les inégalités de concentration du programme (Markov et Bienaymé-Tchebychev), mais à garder plutôt pour la fin de la colle.
- La variance de la loi uniforme n'est pas exigible (à rappeler ou faire démontrer si besoin).

- **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, cas particuliers (finies, discrètes et continues). Opérations sur les variables aléatoires. Loi (comme étant $I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X \in I)$) et fonction de répartition F_X, fonction d'anti-répartition $1 - F_X$. Propriétés analytiques et probabilistes de la fonction de répartition. Condition suffisante pour qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire réelle.
- **Variables aléatoires finies.** Système complet associé à une variable aléatoire finie. Reformulation de la notion de loi pour une variable aléatoire réelle finie : la donnée de $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. La donnée de la loi est équivalente à la donnée de la fonction de répartition. Définition d'une variable aléatoire par sa loi, *i.e.* une suite positive de somme 1. Propriétés des variables aléatoires finies : opérations, allure de la fonction de répartition, reformulation de l'indépendance.
- **Moments d'une variables aléatoire finie.** Définition de l'espérance, variance, écart-type, moents. Propriétés de l'espérance : positivité, linéarité, croissance. Théorème du transfert et application. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire finie. Espérance d'un produit/variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (formule admise pour l'espérance d'un produit). Inégalités de concentration : Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- **Lois finies usuelles.** Uniforme discrète sur un ensemble fini (définition, propriétés et simulation), Bernoulli / Rademacher (définition, propriétés et simulation), lien entre Bernoulli et Rademacher, binomiale (définition, propriétés et simulation).

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, et rappeler le graphe d'arctan. Citer les trois conditions sur $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour qu'elle soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X. Vérifier ces conditions sur G définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x.$
2. Soient U_1, U_2 les résultats de 2 lancers de dés à 6 faces et non pipés, supposés indépendants. Déterminer la loi de U définie comme le plus grand des lancers, en commençant par calculer $\mathbb{P}(U \leqslant k), k \in [\![1, 6]\!]$.
3. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$ pour tout évènement A.
4. Citer le théorème de transfert, puis établir que : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$ pour toute variable aléatoire finie X.
5. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Citer la formule de König-Huygens et la démontrer.
6. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie, rappeler les formules donnant $\mathbb{E}(\lambda X + \mu)$ et $\mathbb{V}(\lambda X + \mu Y)$.
   Donner l'expression de la centrée-réduite $X^\star$ de X, et démontrer qu'elle est effectivement centrée/réduite.
7. Citer *(avec hypothèse(s) !)* l'inégalité de Markov, celle de Bienaymé-Tchebychev, puis démontrer la deuxième à partir de la première. Expliquer pourquoi on peut remplacer « $\geqslant \varepsilon$ » par « $> \varepsilon$ » dans Bienaymé-Tchebychev.
8. Définir la loi de Bernoulli et de Rademacher. Donner un script Python permettant de simuler la première. Montrer que si $R \hookrightarrow \mathscr{R}(p)$, alors $\frac{1+R}{2} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. *(Pour les élèves : nous avons montré cela en début d'exemple concernant la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)*
9. Loi binomiale : loi et script de simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.
10. Définir la loi binomiale, ainsi que l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit. Justifier la propriété de stabilité par retournement : si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$, et l'interpréter. *(pour les élèves : on explique ce que compte cette fois $n - X$)*

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les applications linéaires.