Programme de colles
du 3 au 7/6/2024

- Cette semaine de rentrée : **1** question de cours en Maths.
- Très peu d'exercices faits sur les applications linéaires : pas encore de représentations matricielles. Des questions simples pour le moment, du type : montrer la linéarité, déterminer une base du noyau, appliquer le théorème du rang, base de l'image *etc.*.

1. [MATHS] APPLICATIONS LINÉAIRES

Attention

- Rappels : les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, *etc.*) ne le sont pas non plus.
- Les formules de changement de base ne sont pas au programme de 1ère année.
- L'équivalence entre injectivité et surjectivité lorsque les dimensions sont égales n'est pas marquée explicitement dans le programme ; les étudiants doivent donc le montrer à l'aide du théorème du rang au cas par cas.

- **Généralités.** Définition d'application linéaire, applications linéaires usuelles (homothéties notamment), opérations, propriétés. Puissances d'un endomorphisme et nilpotence, formule du binôme. Image et noyau, lien avec l'injectivité et la surjectivité. Famille génératrice de l'image à l'aide d'une famille génératrice de l'espace de départ. Isomorphisme, automorphisme, notation groupe linéaire. Cas de la dimension finie : nature d'une famille image, définir une application linéaire sur une base définit l'application partout, notion de rang (théorème du rang, lien entre les notions de rang...).

2. [MATHS] VARIABLES ALÉATOIRES

Attention

- Quelques généralités sur les variables aléatoires ont été développées en début de chapitre (par exemple la question de cours **??**), mais les exercices resteront dans le cadre de variables aléatoires **finies**.
- J'ai présenté déjà une première fois les inégalités de concentration du programme (Markov et Bienaymé-Tchebychev), mais à garder plutôt pour la fin de la colle.
- La variance de la loi uniforme n'est pas exigible (à rappeler ou faire démontrer si besoin).

- **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, cas particuliers (finies, discrètes et continues). Opérations sur les variables aléatoires. Loi (comme étant $I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(X \in I)$) et fonction de répartition F_X, fonction d'anti-répartition $1 - F_X$. Propriétés analytiques et probabilistes de la fonction de répartition. Condition suffisante pour qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire réelle.
- **Variables aléatoires finies.** Système complet associé à une variable aléatoire finie. Reformulation de la notion de loi pour une variable aléatoire réelle finie : la donnée de $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. La donnée de la loi est équivalente à la donnée de la fonction de répartition. Définition d'une variable aléatoire par sa loi, *i.e.* une suite positive de somme 1. Propriétés des variables aléatoires finies : opérations, allure de la fonction de répartition, reformulation de l'indépendance.
- **Moments d'une variables aléatoire finie.** Définition de l'espérance, variance, écart-type, moents. Propriétés de l'espérance : positivité, linéarité, croissance. Théorème du transfert et application. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire finie. Espérance d'un produit/variance d'une somme de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes (formule admise pour l'espérance d'un produit). Inégalités de concentration : Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- **Lois finies usuelles.** Uniforme discrète sur un ensemble fini (définition, propriétés et simulation), Bernoulli / Rademacher (définition, propriétés et simulation), lien entre Bernoulli et Rademacher, binomiale (définition, propriétés et simulation).

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définition d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Montrer que l'application moyenne $\mu : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E, F sont deux espaces vectoriels. Définir l'image directe $u(\mathrm{V})$., puis montrer que $u(\mathrm{V})$ est un sous-espace vectoriel de F.
3. Définition d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E, F deux espaces vectoriels. Écrire la définition du noyau de u, puis montrer que $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, si $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'inégalité $\operatorname{Rg} u \leqslant \min(n, p)$ si $\dim \mathrm{E} = n \in \mathbb{N}$ et $\dim \mathrm{F} = p \in \mathbb{N}$ lorsque E, F sont de dimension finie.
5. Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, si $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'équivalence :

   u injective $\iff$ u surjective, sous une certaine hypothèse à rappeler.

6. Citer *(avec hypothèse(s)!)* l'inégalité de Markov, celle de Bienaymé-Tchebychev, puis démontrer la deuxième à partir de la première. Expliquer pourquoi on peut remplacer « $\geqslant \varepsilon$ » par « $> \varepsilon$ » dans Bienaymé-Tchebychev.
7. Définir la loi de Bernoulli et de Rademacher. Donner un script Python permettant de simuler la première. Montrer que si $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathscr{R}(p)$, alors $\dfrac{1+\mathrm{R}}{2} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. *(Pour les élèves : nous avons montré cela en début d'exemple concernant la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)*
8. Loi binomiale : loi et script de simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.
9. Définir la loi binomiale, ainsi que l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit. Justifier la propriété de stabilité par retournement : si $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, alors $n - \mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$, et l'interpréter. *(pour les élèves : on explique ce que compte cette fois $n - \mathrm{X}$)*

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : compléments d'intégration et la fin des applications linéaires.