Programme de colles
du 10 au 14/6/2024

- Cette semaine de rentrée : <u>1</u> question de cours en Maths.
- Dernière semaine de colle : applications linéaires, et des questions de cours sur les intégrales.
- Merci pour votre participation !

1. [MATHS] APPLICATIONS LINÉAIRES

Attention

- Rappels : les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, *etc.*) ne le sont pas non plus.
- Les formules de changement de base ne sont pas au programme de 1ère année.
- L'équivalence entre injectivité et surjectivité lorsque les dimensions sont égales n'est pas marquée explicitement dans le programme ; les étudiants doivent donc le montrer à l'aide du théorème du rang au cas par cas.

- **Généralités.** Définition d'application linéaire, applications linéaires usuelles (homothéties notamment), opérations, propriétés. Puissances d'un endomorphisme et nilpotence, formule du binôme. Image et noyau, lien avec l'injectivité et la surjectivité. Famille génératrice de l'image à l'aide d'une famille génératrice de l'espace de départ. Isomorphisme, automorphisme, notation groupe linéaire. Cas de la dimension finie : nature d'une famille image, définir une application linéaire sur une base définit l'application partout, notion de rang (théorème du rang, lien entre les notions de rang...).
- **Représentation matricielle.** Définition, propriété du symbole « Mat » (linéarité, isomorphisme). Application linéaire canoniquement associé à une matrice, et réciproque. Noyau et image d'une matrice. Opérations : matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un inverse.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définition d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Montrer que l'application moyenne $\mu \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{array}\right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E, F sont deux espaces vectoriels. Définir l'image directe $u(\mathrm{V})$., puis montrer que $u(\mathrm{V})$ est un sous-espace vectoriel de F.
3. Définition d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ avec E, F deux espaces vectoriels. Écrire la définition du noyau de u, puis montrer que $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, si $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'inégalité $\operatorname{Rg} u \leqslant \min(n, p)$ si $\dim \mathrm{E} = n \in \mathbb{N}$ et $\dim \mathrm{F} = p \in \mathbb{N}$ lorsque E, F sont de dimension finie.
5. Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, si $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'équivalence :
   $$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective}, \quad \text{sous une certaine hypothèse à rappeler.}$$
6. Déterminer l'application linéaire u *(expression analytique!)* (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ avec n, p à préciser) canoniquement associée à $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
7. À l'aide d'une technique de comparaison somme-intégrale, montrer successivement que $\lim_{n \to \infty} \mathrm{H}_n = \infty$ où $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geqslant 1$, puis que : $\mathrm{H}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.
8. >_ Énoncé du théorème de convergence des sommes de RIEMANN (droite ou gauche au choix du colleur). Fonction Python implémentant la méthode des rectangles (à droite ou à gauche au choix du colleur).

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les vacances.