Chapitre (ALG) 2 Nombres réels

Résumé & Plan

Ce chapitre consiste essentiellement en des rappels des notions vues par le passé. Afin de ne pas se limiter à des exemples simplistes on sera parfois amené à utiliser des notions et propriétés vues au lycée qui ne seront rappelées qu'après.

L'utilisation du x en mathématiques pour désigner une inconnue vient de l'arabe, une traduction en français serait « la chose ».

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Nous supposerons construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ainsi que les sous-ensembles usuels des rationnels, entiers *etc.*. Mais tout ceci cache des difficultés auxquelles les mathématiciens se sont frottées pendant longtemps : celle de la construction de ces ensembles. Par exemple, qu'est-ce que l'entier 1, 2 *etc.* ? Dans le livre *Principia Mathematica* (1910), il faut environ 300 pages à WHITEHEAD et RUSSEL pour démontrer que $1+1=2$.

∗54·43. ⊢ :. $\alpha, \beta \in 1$. ⊃ : $\alpha \cap \beta = \Lambda$. ≡ . $\alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

⊢ . ∗54·26 . ⊃ ⊢ :. $\alpha = \iota\text{‘}x$. $\beta = \iota\text{‘}y$. ⊃ : $\alpha \cup \beta \in 2$. ≡ . $x \neq y$.

[∗51·231] ≡ . $\iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda$.

[∗13·12] ≡ . $\alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

⊢ . (1) . ∗11·11·35 . ⊃

⊢ :. $(\exists x, y)$. $\alpha = \iota\text{‘}x$. $\beta = \iota\text{‘}y$. ⊃ : $\alpha \cup \beta \in 2$. ≡ . $\alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

⊢ . (2) . ∗11·54 . ∗52·1 . ⊃ ⊢ . Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Nous ne nous poserons évidemment pas de telles questions ici.

1. OPÉRATIONS DE BASES

1.1. Addition & Multiplication

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux *lois internes* : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$. Pourquoi les qualifier d'internes ? Car elles prennent en argument deux réels et elles renvoient un autre réel, on reste donc « dans l'ensemble $\mathbb{R}$ » :

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Rappelons quelques propriétés de la loi additive.

Proposition 1 | Propriétés de l'addition

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- **[Interne]** $x + y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- **[Commutativité]** $x + y = y + x$.
- **[Élément neutre]** $x + 0 = 0 + x = x$. On dit que 0 est un *élément neutre* pour l'addition.
- **[Élément opposé]** $x + (-x) = 0$. On dit que $-x$ est *l'élément opposé de x* pour l'addition.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- $x \times y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- **[Commutativité]** $x \times y = y \times x$.
- **[Élément neutre]** $x \times 1 = 1 \times x = x$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication.
- **[Élément absorbant]** $x \times 0 = 0 \times x = 0$. On dit que 0 est *l'élément absorbant* pour la multiplication.
- **[Élément inverse]** Si $x \neq 0$, alors $x \times \frac{1}{x} = 1$. On dit que $\frac{1}{x}$ est *l'élément inverse de x* pour la multiplication, noté aussi x^{-1}.
- **[Distributivité]** $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Remarque 1 Il existe un vocabulaire — mais [H.P] en BCPST — pour les ensembles munis de lois. Ici, avec les propriétés précédentes :

- $(\mathbb{R}, +)$ est qualifié de *groupe commutatif*,
- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est qualifié de *corps commutatif*.

1.2. Rappels de calcul fractionnaire

On rappelle ici les règles de calcul relatives aux fractions.

Proposition 3 | Calcul fractionnaire

Soient $((a, c), (b, d)) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^*)^2$. Alors :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$,
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$,
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
- si $c \neq 0$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Note | *Puisque $a = \frac{a}{1}$, on a $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$*

Pour réduire au même dénominateur deux fractions, nous ne sommes pas toujours obligés d'utiliser le produit. On peut parfois faire mieux (voir l'exemple qui suit, lorsque les dénominateurs possèdent un facteur commun).

Exemple 1 $\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13}{2 \times 14} + \frac{5}{3 \times 14} = \frac{49}{2 \times 3 \times 14} = \frac{7}{12}$.

Remarque 2 On prend l'habitude de simplifier au maximum les quotients en remarquant que $\frac{a \times \cancel{c}}{b \times \cancel{c}} = \frac{a}{b}$.

On rappelle également les grossières erreurs ci-après, à ne plus commettre bien sûr.

Attention

- $\frac{a + c}{b + c} \neq \frac{a}{b}$: on ne simplifie **PAS** dans le cas d'une addition,
- $\frac{a}{b + c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$: on ne sépare **PAS** une somme au dénominateur.

De plus certaines fractions possèdent une forme particulière, dite *irréductible*.

Théorème 1 | Forme irréductible d'un rationnel

Tout nombre rationnel non nul peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (*i.e.* qui ont 1 pour seul diviseur commun). Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^*, \quad \exists!\,(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

Dans la pratique, pour obtenir la forme irréductible, on divise numérateur et dénominateur par le plus grand diviseur commun.

Exemple 2 Mettre sous forme irréductible $\frac{495}{60}$.

Attention Certaines parenthèses sont cachées

On prendra garde à appliquer correctement la règle des signes devant une fraction !

En effet, l'écriture fractionnaire $\frac{a + b}{c}$ remplace l'écriture en ligne $(a + b) \div c$: il y a donc toujours une parenthèse masquée autour du numérateur d'une fraction... Ainsi, par exemple :

$$3 - x - \frac{2 - x}{3} = \frac{3(3 - x) - (2 - x)}{3} = \frac{9 - 3x - 2 + x}{3} = \frac{7 - 2x}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x.$$

Exemple 3 Pour tout nombre réel x différent de -1,
$\dfrac{5x+1}{x+1} - \dfrac{x+3}{2x+2} =$

1.3. Rappels sur les égalités et inégalités

Une inégalité est une formule reliant deux expressions numériques avec un symbole de comparaison (≤, ≥, <, >). Une **inégalité stricte** compare nécessairement deux valeurs différentes tandis qu'une **inégalité large** reste valable en cas d'égalité.

Attention à ne pas confondre inégalités strictes et inégalités larges. Lorsque l'on écrit ou dit « ... est plus petit/grand que ... », implicitement on parle d'inégalités larges. D'où l'importance de préciser « strictement » lorsque c'est le cas, notamment à l'oral.

Exemple 4 D'ailleurs, si a et b sont deux réels, laquelle de ces deux implications est vraie ?

- $a \leqslant b \Longrightarrow a < b$
- $a < b \Longrightarrow a \leqslant b$

Proposition 4 | Relation d'ordre ≤
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On dit que ≤ est une relation d'ordre sur ℝ car
- **[Réflexivité]** $x \leqslant x$.
- **[Anti-symétrie]** $x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Longleftrightarrow x = y$.
- **[Transitivité]** $x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z$.

Pour comparer deux quantités (savoir laquelle des deux quantités est la plus grande), on peut faire leur différence et étudier son signe, sauf si la comparaison est évidente. De plus, deux réels se comparent toujours : on dit que ℝ est *totalement ordonné*. On peut alors définir quantités ci-après, que nous utiliserons parfois.

Définition 1 | Max / Min
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on définit alors

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant y, \\ y & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geqslant y, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Manipulation d'égalités et d'inégalités. On va rappeler dans ce paragraphe les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et inégalités sur ℝ vues dans les classes antérieures.

Proposition 5 | Manipulations d'égalités & d'inégalités
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- **[Additionner =]** $x = y \Longleftrightarrow x + z = y + z$.
- **[Équation produit]** $xy = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ **ou** $y = 0$.
- **[Multiplier =]** Si de plus $z \neq 0$, alors $x = y \Longleftrightarrow xz = yz$.
- **[Signe d'un produit]**
$$xy \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de même signe,}$$
$$xy \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \text{ et } y \text{ sont de signe opposé.}$$
- **[Additionner ≤]** $x \leqslant y \Longleftrightarrow x + z \leqslant y + z$.
- **[Multiplier ≤]** Si de plus $z > 0$, alors :
$$x \leqslant y \Longleftrightarrow xz \leqslant yz.$$
Si de plus $z < 0$, alors :
$$x \leqslant y \Longleftrightarrow xz \geqslant yz.$$
- **[Additionner des inégalités « de même sens »]** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\text{si } \begin{cases} x \leqslant y \\ z \leqslant t \end{cases} \quad \text{alors} \quad x + z \leqslant y + t.$$
- **[Multiplier des inégalités « de nombres positifs »]** Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\text{si } \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 \leqslant z \leqslant t \end{cases} \quad \text{alors} \quad 0 \leqslant xz \leqslant yt.$$
- **[Inverser des inégalités]** Si x et y sont deux réels non nuls de même signe,
$$x \leqslant y \Longleftrightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Note | *Ce dernier point est une conséquence de la décroissance de la fonction inverse sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$, *voir plus loin.*

- On peut donc multiplier une égalité **par une quantité non nulle**, et ajouter/soustraire par le même terme de chaque côté.

- Le signe d'un produit de deux éléments permet de caractériser le signe de chaque terme du produit.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement positive**.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement négative en inversant le sens de l'inégalité**.
- On peut donc additionner deux inégalités, et les multiplier sous réserve qu'elles ne fassent intervenir que des nombres réels positifs.
- On peut donc inverser deux inégalités faisant intervenir des réels non nuls de même signe.

Bien entendu, toutes ces propriétés s'adaptent à des inégalités strictes, et s'étendent à des sommes quelconques de termes.

Attention

- **On ne soustrait pas des inégalités**.
  Par exemple, $\begin{cases} -1 \leqslant 2 \leqslant 2, \\ 0 \leqslant 1 \leqslant 2 \end{cases}$ et on n'a clairement pas $-1-0 \leqslant \boxed{2-1 \leqslant 0}$! Si on veut encadrer une quantité du type $x-y$, on peut encadrer x et encadrer y puis multiplier l'encadrement de y par -1 *(ce qui change le sens!)* , puis sommer les inégalités pour terminer.
- Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens aussi, puisque diviser par un négatif revient à multiplier par son inverse (qui sera négatif).

Exemple 5 Soit $(a,b,c,d,x,y) \in \mathbb{R}^6$. Supposons que $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$.
Que peut-on dire de $x+y$ et de $x-y$?
Dans le cas où $a \geq 0$ et $c > 0$, que peut-on dire de xy et de $\dfrac{x}{y}$?

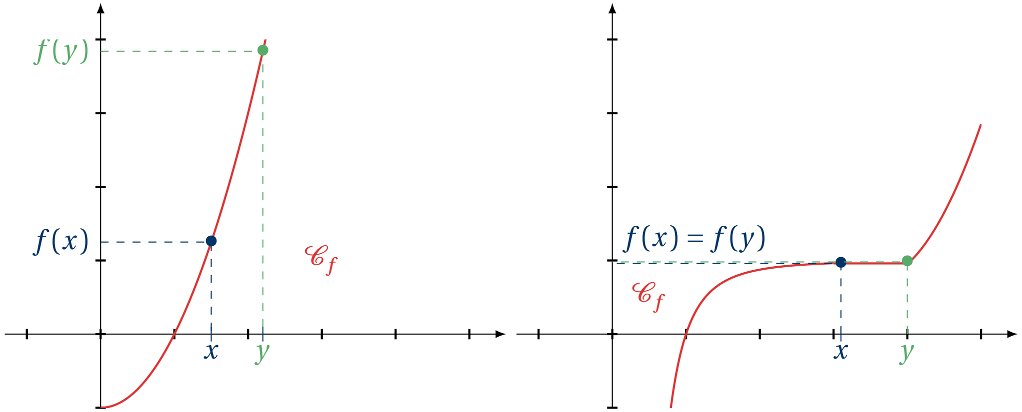
Note: *Pour le dernier encadrement, on prendra garde au fait qu'aucune règle ne permet de « diviser des inégalités » !*

Composition d'inégalités par une fonction croissante. Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Rappelons que (nous le reverrons dans le chapitre sur les fonctions) :

- f est dite *croissante* sur I si
  $$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)}$$
  Note: *La réciproque est fausse en général, sauf si f est supposée strictement croissante (voir définition ci-dessous)*
- f est dite *strictement croissante* sur I si
  $$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y).$$
  Ainsi, composer une inégalité large par une fonction croissante conserve l'ordre de l'inégalité large, composer une inégalité stricte par une fonction strictement croissante conserve l'inégalité stricte.
- Une fonction strictement croissante est donc croissante (une inégalité stricte est forcément large).

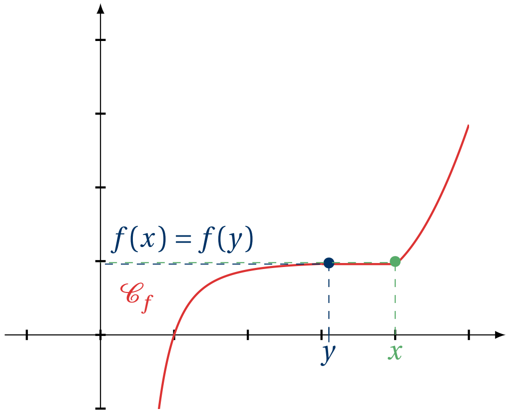
FONCTION STRICTEMENT CROISSANTE : SI $x < y$ ALORS $f(x) < f(y)$

FONCTION CROISSANTE : SI $x \leqslant y$ ALORS $f(x) \leqslant f(y)$



En vue de la résolution d'équations et d'inéquations, on souhaiterait obtenir une réciproque à l'implication encadrée. Autrement dit, on souhaiterait savoir dans quel cas l'inégalité $f(x) \leqslant f(y)$ fournit l'inégalité $x \leqslant y$:

- si f est *strictement* croissante, on ne peut avoir $f(x) \leqslant f(y)$ que si $x \leqslant y$;
- si f est seulement supposée croissante, on peut avoir $f(x) \leqslant f(y)$ (en ayant $f(x) = f(y)$) sans que $x \leqslant y$! Voir par exemple le dessin ci-dessous : on a $f(x) \leqslant f(y)$ (même égaux), et pourtant $x \geqslant y$.



D'où le résultat suivant.

Proposition 6 | Composition d'une inégalité par une fonction strictement croissante
Si f est une fonction **strictement** croissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines inéquations*

Preuve Soit $(x,y) \in \mathrm{I}^2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Montrons l'implication par contraposée.

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 7 | Composition d'une égalité par une fonction strictement croissante
Si f est une fonction **strictement** croissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x = y \iff f(x) = f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines équations*

Preuve Soit $(x,y) \in \mathrm{I}^2$. Alors :
$$x = y \iff \begin{cases} x \leqslant y \\ y \leqslant x \end{cases} \overset{\text{proposition précédente}}{\iff} \begin{cases} f(x) \leqslant f(y) \\ f(y) \leqslant f(x) \end{cases} \iff f(x) = f(y).$$

La discussion précédente possède son analogue dans le cas des fonctions décroissantes, nous énonçons rapidement les résultats associés.

COMPOSITION D'INÉGALITÉS PAR UNE FONCTION DÉCROISSANTE. Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

- f est dite *décroissante* sur I si
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)}$$

Note | *La réciproque est fausse en général, sauf si f est supposée strictement décroissante (voir définition ci-dessous)*

- f est dite *strictement décroissante* sur I si
$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x<y \quad\Longrightarrow\quad f(x)>f(y).$$

Ainsi, composer une inégalité large par une fonction décroissante renverse l'ordre de l'inégalité large, composer une inégalité stricte par une fonction strictement croissante renverse l'inégalité stricte.

A l'instar des fonctions croissantes, la réciproque de l'inégalité encadrée ne peut être obtenue qu'en cas de stricte décroissance de la fonction :

Proposition 8 | Composition d'une inégalité par une fonction strictement décroissante
Si f est une fonction **strictement** décroissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x\leqslant y \iff f(x)\geq f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines inéquations*

On en déduit que :

Proposition 9 | Composition d'une égalité par une fonction strictement décroissante
Si f est une fonction **strictement** décroissante sur un intervalle I, alors :
$$\forall (x,y)\in \mathrm{I}^2,\quad x=y \iff f(x)=f(y).$$

Note | *Cette proposition sera utile pour la rédaction de la résolution de certaines équations*

Exemple 6

- $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2,\quad x\leqslant y \iff \mathrm{e}^x\leqslant \mathrm{e}^y$, car :

- $\forall (x,y)\in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad x\leqslant y \Longrightarrow \ln(x)\leqslant \ln(y)$, car :

- $\forall (x,y)\in (\mathbb{R}_+)^2,\quad x\leqslant y \iff x^2\leqslant y^2$, car :

- $\forall (x,y)\in (\mathbb{R}_-)^2,\quad x< y \Longrightarrow x^2> y^2$, car :

- $\forall (x,y)\in (\mathbb{R}_+)^2,\quad x= y \iff x^2= y^2$, car :

- $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2,\quad x=y$ **ou** $x=-y \iff x^2= y^2$, car :

- $\forall (x,y)\in (\mathbb{R}_+^*)^2,\quad x\leqslant y \iff \dfrac{1}{x}\geq\dfrac{1}{y}$, car :

Attention

- Il est **faux** de dire que
$$\forall (x,y)\in \boxed{\mathbb{R}^2},\quad x\leqslant y \Longrightarrow x^2\leqslant y^2$$
car la fonction carré n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$. En revanche, il est **juste** de dire :
$$\forall (x,y)\in \boxed{(\mathbb{R}_+)^2},\quad x\leqslant y \Longrightarrow x^2\leqslant y^2.$$

- **Pour élever au carré une inégalité en préservant le sens de l'inégalité, prenez garde au fait que les quantités doivent être <u>positives</u> !**

1.4. Puissances entières

Définition 2 | Puissances entières

Soient $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$.

- On note x^2 le réel $x \times x$. On définit par récurrence le réel x^n par :
$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{n+1} = x \times x^n.$$
- Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit x^{-n} par : $\quad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

De manière plus explicite, avec les notations précédentes, on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}, \quad x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}}.$$

De manière générale, nous serons capable de définir ultérieurement x^α avec $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ mais il faudra attendre les rappels sur la fonction exponentielle et le logarithme. Rappelons les règles usuelles sur les fonctions puissances.

Proposition 10 | Règles sur les puissances

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ de sorte que les puissances ci-après soient définies. Alors :

- $x^{n+p} = x^n \times x^p \quad (x^n)^p = x^{n \times p} \quad (x \times y)^n = x^n \times y^n$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.
- Si on a de plus $x > 0$, alors : $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \dfrac{1}{x^{m-n}}$.

Exemple 7 **(Quiz)** Cochez la ou les bonnes réponses.

Expression	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$a^5 a^3 =$	☐ a^{5^3}	☐ a^{15}	☐ a^8
$a^2 b^3 =$	☐ $(ab)^2 b$	☐ $(ab)^5$	☐ $(ab)^6$
$\left(a^2\right)^n =$	☐ a^{2n}	☐ a^{2+n}	☐ a^{2^n}
$(3^n)^2 =$	☐ 3^{n^2}	☐ 6^n	☐ 9^n
$\left(a^{n^2}\right)^3 =$	☐ a^{3n^2}	☐ a^{n^8}	☐ a^{n^6}
$a^{3n}(a^n)^2 =$	☐ a^{3n^3}	☐ a^{n^2+3n}	☐ a^{5n}
$2^{-2k}3^k =$	☐ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$	☐ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$	☐ $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}$
$3^{2k+1}2^{-k} =$	☐ $3\left(\dfrac{9}{2}\right)^{-k}$	☐ $3\left(\dfrac{9}{2}\right)^k$	☐ $9\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$
$2^n + 2^n =$	☐ 4^n	☐ 2^{n+1}	☐ 2^{2n}
$(-2)^{2n+1} =$	☐ -2^{2n+1}	☐ $(-4)^{n+1}$	☐ -2×4^n
$2 \times \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 =$	☐ 2^n	☐ 2^{n+1}	☐ $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

Les puissances de -1 sont très faciles à calculer, elle dépend simplement de la parité de la puissance, la preuve étant une simple disjonction de cas dans la définition de la puissance entière.

Proposition 11 | Puissances alternées

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$
- $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -x^n & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$

Preuve

-

-

Exemple 8 Écrire sous la forme $\pm 2^p \times 3^q$ avec p et q deux entiers relatifs :

1. $\dfrac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 3^8 \times 6^{-1}} =$

2. $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} =$

3. $\dfrac{\left(3^2 \times (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \times 2^3\right)^{-2}} =$

4. $\dfrac{12^{-4} \times (-3)^3}{\left(\frac{2}{9}\right)^3 \times 18^2 \times 16^{-3}} =$

Proposition 12 | Identités remarquables

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Preuve Elles se démontrent directement à l'aide de la définition et des règles usuelles de développement : par exemple,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Exemple 9 (Puissance 3) Développer $(a+b)^3, (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Remarque 3 (Généralisations possibles)

- Les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ seront généralisées dans le chapitre sur les sommes/produits en la formule dite du *binôme de Newton* pour des puissances plus élevées.
- L'identité remarquable permettant de factoriser $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ possède elle aussi une généralisation à toute expression de la forme $a^n - b^n$, $n \in \mathbb{N}$. On l'appelle l'*identité de Bernoulli* mais hors-programme en BCPST.

Encadrements et puissances entières. Nous avons un résultat sur la manipulation des encadrements et des puissances, qui précise en d'autres termes la monotonie de certaines fonctions puissance, le voici.

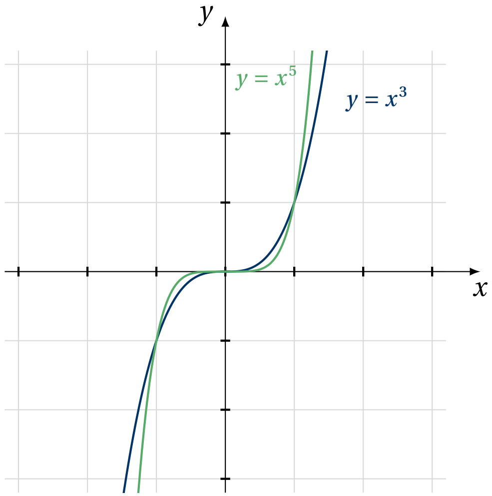
Proposition 13 | Puissances et encadrements

- Soit $n = 2k+1 \in \mathbb{N}$ un entier impair, $k \in \mathbb{N}$. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement, c'est-à-dire :

  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \iff x^n \leqslant y^n.$$

  Autrement dit, la fonction $x \longmapsto x^{2k+1}$ est strictement croissante pour tout $k \in \mathbb{N}$.

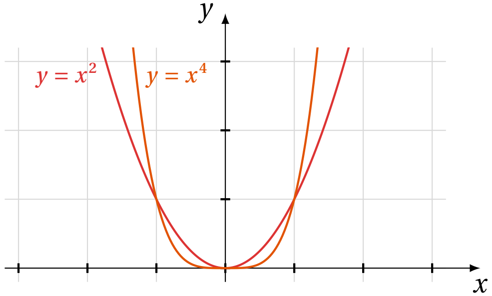
  Courbe représentative de $x \mapsto x^n$ si n est impair



- Soit $n = 2k \in \mathbb{N}$ un entier pair, $k \in \mathbb{N}$. Alors :
  - on peut toujours élever à la puissance n un encadrement **positif**, c'est-à-dire :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant y \iff 0 \leqslant x^n \leqslant y^n.$$
  - On peut toujours élever à la puissance n un encadrement **négatif à condition de renverser l'ordre**, c'est-à-dire :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \leqslant 0 \iff 0 \leqslant y^n \leqslant x^n.$$

  Autrement dit, la fonction $x \longmapsto x^{2k}$ est strictement croissante **sur** $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante **sur** $\mathbb{R}_-$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Courbe représentative de $x \mapsto x^n$ si n est pair



1.5. Racines carrées & cubiques

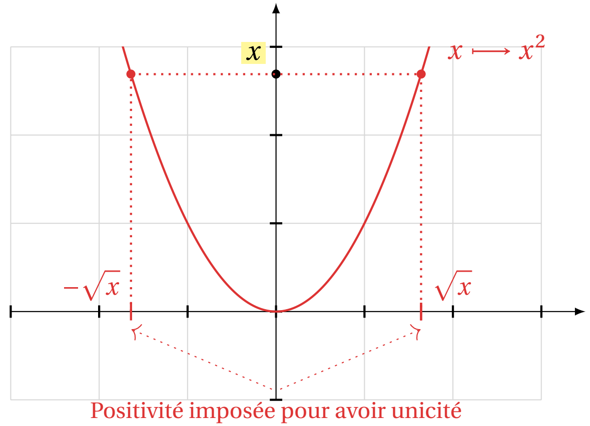
On sait élever au carré des réels, ou à une puissance plus grande. On peut aussi se poser la question inverse : est-ce que tout réel peut être vu comme le carré d'un autre? le cube d'un autre? Pour la racine carrée la réponse est clairement non pour les négatifs (un carré est forcément positif), et oui pour les positifs. Pour les cubes, il y a toujours existence et unicité.

Racine carrée. Rappelons la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif.

Définition/Proposition 1 | Racine carrée

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{2}}$, tel que :
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$
- On appelle ce réel **la** *racine carrée (ou simplement parfois « la racine ») de* x.

Courbe représentative de $x \mapsto x^2$



Exemple 10

- $\sqrt{4} =$ car :
- $\sqrt{36} =$ car :
- $\sqrt{2} \approx 1.41$

Attention — Racine d'un carré

La quantité $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $x^2 \geqslant 0$. En revanche, si $x < 0$, nous n'avons pas $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$!

Note — *Nous verrons un peu plus loin une formule pour simplifier $\sqrt{x^2}$ pour tout nombre réel x, qui fait appel à la valeur absolue.*

Proposition 14 | Règles sur les racines carrées

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On a :

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Exemple 11

- $\sqrt{25 \times 64} =$
- $\sqrt{\dfrac{16}{49}} =$

Attention Racine d'une somme

On ne peut rien dire de la racine d'une somme.

Par exemple, $\begin{cases} \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \end{cases}$ donc $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Note *Il est donc absolument faux d'écrire que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tous nombres réels positifs a et b !*

On rappelle que la règle de calcul $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ permet de « réduire » des racines carrées *via* « extraction » de carrés parfaits[1] dans les racines carrées. Ci-après un exemple détaillé.

Exemple 12 **(Extraire un carré parfait)** Ecrire le nombre $A = \sqrt{45}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b *le plus petit possible* *(pour obtenir b « le plus petit possible », il faut chercher dans 45 le carré parfait le « plus gros possible ».)*

$A = \sqrt{45}$

$= \sqrt{\quad \times \quad}$ *on fait apparaître dans 45 un carré parfait, à savoir 9*

$= \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad}$ *on utilise la propriété $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$*

$= \quad \times \sqrt{\quad}$ *on simplifie la racine du carré parfait*

Exemple 13 Écrire les quantités sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont deux entiers avec b *le plus petit possible* :

$\sqrt{8}, \quad \sqrt{72}, \quad 3\sqrt{125}$

1. On appelle carré parfait le carré d'un entier naturel non nul. Ainsi, les premiers carrés parfaits sont $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, \ldots$

Il arrive parfois que certaines fractions soient plus agréables à étudier sans racine carrée au dénominateur. Pour s'en débarrasser, un premier cas simple est celui où le dénominateur n'est constitué que d'une racine carrée.

Exemple 14

- $\dfrac{3}{\sqrt{2}} =$
- $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$

Certaines racines carrées sont plus compliquées à éliminer, comme par exemple dans l'expression $\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}$ *(multiplier par $\sqrt{15}$ au dénominateur fait apparaître un facteur $4\sqrt{15}$ qui traine dans les pattes!)* . On utilise alors la notion de quantité conjuguée associée à une identité remarquable pour avancer.

Définition 3 | Quantité conjuguée

Soient $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+$. Le nombre $A - \sqrt{B}$ est la *quantité conjuguée* de $A + \sqrt{B}$.

Exemple 15 Par exemple, la quantité conjuguée de $4 - \sqrt{15}$ est $4 + \sqrt{15}$.

On a alors la relation : $(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B}) = A^2 - B$. Multiplier par la quantité conjuguée permet de faire « disparaître » les radicaux d'un dénominateur ou encore d'étudier le signe d'expressions de la forme $A(x) \pm B(x)$. Par exemple,

$$\frac{1}{4-\sqrt{15}} = \frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = \frac{4+\sqrt{15}}{4^2-15} = 4+\sqrt{15}.$$

Exemple 16 **(Utilisation de la quantité conjuguée)** Faire en sorte qu'il n'y ait plus de racine au dénominateur dans l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Enfin, la (stricte) croissance de la fonction racine carrée permet d'obtenir certains encadrements.

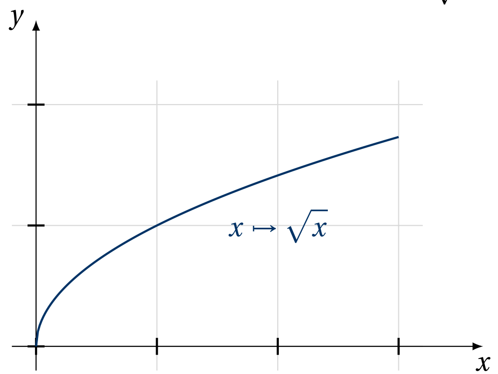
Proposition 15 | Racines et encadrements

On peut toujours appliquer la racine carrée à un encadrement de nombres réels positifs en conservant le sens de l'encadrement :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, & x \leqslant y \iff \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}. \\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, & x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}. \end{cases}$$

Autrement dit, la fonction $x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \sqrt{x}$ est (strictement) croissante.

Courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$



Exemple 17 Montrer que : $2 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$. *(cette technique peut être très utile lorsque l'on ne connait pas de valeur approchée d'une racine)*

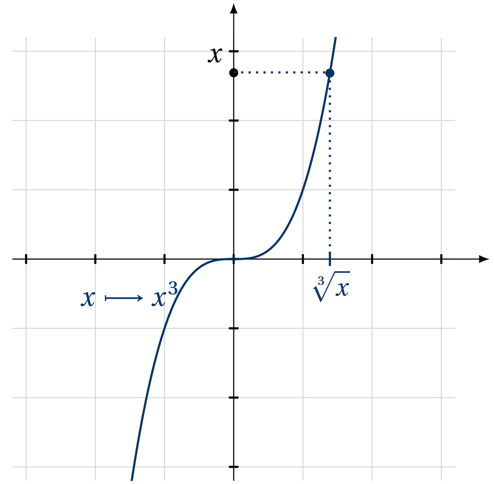
La racine cubique. Moralement, la racine cubique d'un nombre réel x est l'unique nombre réel qui, élevé au cube, donne le réel x. Une différence notable entre racine carrée et racine cubique est que la racine cubique est définie pour tout nombre réel x, alors que la racine carrée n'est définie que sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Définition/Proposition 2 | Racine cubique

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt[3]{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{3}}$, tel que :

$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$. On appelle ce réel **la** *racine cubique* de x.

Courbe représentative de $x \mapsto x^3$



Exemple 18 Déterminer $\sqrt[3]{8}$ ainsi que $\sqrt[3]{-27}$.

Les propriétés sur les racines cubiques sont analogues à celles sur les racines carrées.

Proposition 16 | Règles sur les racines cubiques

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$.
- Si on a de plus $y \neq 0$, alors : $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$.
- $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x, \qquad \sqrt[3]{x^3} = x$.

Remarque 4 Quand bien même la racine cubique figure au programme officiel, en réalité nous l'utiliserons assez peu.

1.6. Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est le même nombre réel mais dont on aurait enlevé le signe devant. Ainsi, si ce réel est positif il n'y a rien à faire, c'est sa valeur absolue. En revanche, s'il est négatif, il suffit d'ajouter un signe « - » devant ledit réel. Cela nous mène tout droit à la définition ci-après.

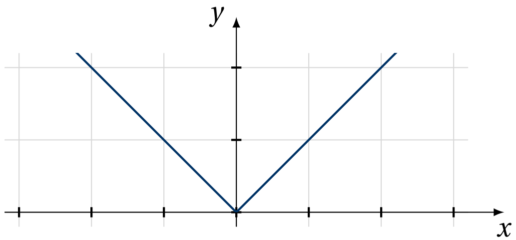
Définition 4 | Valeur absolue
Soit $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue de* x, notée $|x|$, est le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 19 Déterminer :
- $|2| =$
- $|0| =$
- $|-3| =$
- $|-\pi| =$

La définition de la valeur absolue permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction valeur absolue.

COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \longmapsto |x|$



Exemple 20 Donner, en fonction de x, un expression sans valeur absolue de la quantité $|x-3|-|x+2|$. *On pourra présenter le résultat sous forme d'un tableau.*

Définition 5 | Distance entre deux réels
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit la *distance de* x *à* y comme étant le réel noté $\mathrm{d}(x, y)$ et défini par : $\mathrm{d}(x,y) = \max(x,y) - \min(x,y)$. C'est donc la différence entre la plus grande valeur et la plus petite.

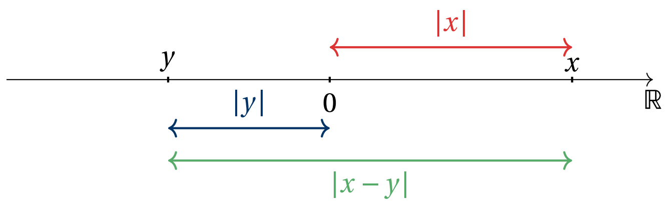
Exemple 21
- $\mathrm{d}(1,4) = 4-1 = 3$,
- $\mathrm{d}(3,-1) = 3-(-1) = 4$.

Proposition 17 | Lien entre distance et valeur absolue
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\mathrm{d}(x,y) = |x-y|$.

Preuve *(Point clef — **Disjonction de cas suivant la position entre x et y.**)*
-
-

Remarque 5 Puisque pour tout réel x, on a : $|x| = |x-0|$, **la valeur absolue de x peut s'interpréter comme étant la distance entre x et 0.** *(Cette remarque sera essentielle pour interpréter certaines équations et inéquations en terme de distance)*

Les réels peuvent se représenter sur une droite dite « numérique », les quantités définies ci-dessus (valeur absolue et distante) se visualisent comme suit.



Pour tous réels x, y, la valeur absolue correspond à l'écart (sans signe) entre x et y, et $|x|$ représente donc la distance entre x et 0.

Proposition 18 | Propriétés de la valeur absolue et de la distance

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $|0| = 0$,
- $|x| \geqslant 0, \quad |x| = \max\{x, -x\}$.
- **[Séparation]** $\quad |x| = 0 \iff x = 0, \quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.
- **[Parité / Symétrie]** $\quad |x| = |-x|, \quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.
- **[Equation et valeur absolue]** Pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$:

$$|x| = \mathrm{M} \iff x = \mathrm{M} \quad \underline{\textbf{ou}} \quad x = -\mathrm{M}$$

0

- **[Encadrement et valeur absolue]** $\quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
- **[Inéquation et valeur absolue]** Plus généralement, pour tout $(m, \mathrm{M}) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

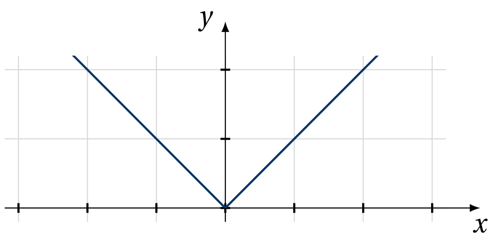
$$|x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}$$

0

$$|x| \geqslant \mathrm{M} \iff x \geqslant \mathrm{M} \ \underline{\textbf{ou}} \ x \leqslant -\mathrm{M}.$$

0

$$m \leqslant |x| \leqslant \mathrm{M} \iff m \leqslant x \leqslant \mathrm{M} \ \underline{\textbf{ou}} \ -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant -m.$$



Note | *Les propriétés restent vraies avec des inégalités strictes.*

- **[Carré]** $\quad |x| = \sqrt{x^2}, \quad |x|^2 = x^2$.
- **[Égalité de valeurs absolues]** $\quad |x| = |y| \iff x = y \ \underline{\textbf{ou}} \ x = -y$.
- **[Produit/quotient]** $\quad |xy| = |x| \times |y|$. De plus si $y \neq 0$, alors :

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Remarque 6

- Les propriétés

$$|x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}, \quad |x| \geqslant \mathrm{M} \iff x \geqslant \mathrm{M} \ \underline{\textbf{ou}} \ x \leqslant -\mathrm{M}$$

sont très intuitives si on garde à l'esprit l'interprétation de la valeur absolue en terme de distance à l'origine. Par exemple, si $|x| \leqslant \mathrm{M}$, alors cela signifie que x est à distance au plus M de l'origine, donc que x est dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$.
- Elles entrainent d'ailleurs leurs analogues pour la fonction carrée : pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$,

$$x^2 \leqslant \mathrm{M} \iff \sqrt{x^2} = |x| \leqslant \sqrt{\mathrm{M}} \iff -\sqrt{\mathrm{M}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\mathrm{M}}.$$

Toutes ces propriétés seront plus intuitives dans le chapitre sur les fonctions où la valeur absolue sera vue comme une fonction.

Preuve

- La propriété $|0| = 0$ est évidente.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Séparation]** Montrons celle pour la valeur absolue, celle pour la distance s'obtient en remplaçant x par $x - y$ dans la première. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Parité / Symétrie]** Montrons celle pour la valeur absolue, celle pour la distance s'obtient en remplaçant x par $x-y$ dans la première. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Équation et valeur absolue]**

$\boxed{\Longleftarrow}$

$\boxed{\Longrightarrow}$

- **[Encadrement et valeur absolue]** Par disjonction de cas. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Inéquation et valeur absolue]** On démontre par exemple la première, et les autres on se contente du dessin. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- **[Carré]** Si $x \geqslant 0$ alors
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x = |x|.$$
Si $x < 0$ alors $-x \geqslant 0$ et on a :
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x)} \times \sqrt{(-x)} = \sqrt{(-x)}^2 = -x = |x|.$$
La deuxième partie de la formule est une conséquence directe de la première, en l'élevant au carré.

- **[Egalité de valeurs absolues]**

- **[Produit / Quotient]** On peut par exemple utiliser la propriété analogue déjà démontrée pour la racine.
$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x| \times |y|.$$

Théorème 2 | Inégalité triangulaire

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors : $\quad ||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$

Note | *La majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.*

Preuve

1. Commençons par montrer que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Les quantités étant positives, nous allons montrer que l'inégalité élevée au carré est vraie.

2. On montre ensuite : $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$.

$$||x|-|y||^2 = |x|^2 - 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$$

Or $xy \geqslant -|xy|$, d'où $x^2+y^2+2xy \geqslant x^2-2|xy|y^2$, c'est-à-dire

$$|x+y|^2 \geqslant ||x|-|y||^2.$$

Et, comme $|x+y| \geqslant 0$ et $||x|-|y|| \geqslant 0$, en obtient en passant à la racine :

$$|x+y| \geqslant ||x|-|y||.$$

Attention

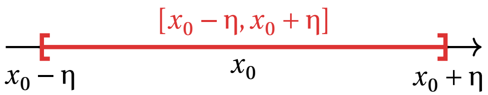
- Pour tous réels x et y, on a $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ donc en remplaçant y par $-y$, on obtient (puisque $|-y|=|y|$) :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| \leqslant |x|+|y|.$$
- En revanche, il est complètement faux d'écrire : $|x-y| \leqslant \cancel{|x|-|y|}$.
- Il est aussi faux d'écrire que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leqslant y \implies |x| \leqslant |y|$.

INTERVALLES ET LIEN AVEC LA VALEUR ABSOLUE. Les intervalles centrés autour d'un point peuvent être reformulés à l'aide de la valeur absolue, puisque rappelons que pour tout $\eta \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$:

$$|x| \leqslant \eta \iff -\eta \leqslant x \leqslant \eta \iff x \in [-\eta, \eta],$$

ou encore pour tout $x, x_0 \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}^+$:

$$|x-x_0| \leqslant \eta \iff -\eta \leqslant x - x_0 \leqslant \eta \iff x \in [x_0-\eta, x_0+\eta].$$



En d'autres termes :

$$]x_0-\eta, x_0+\eta[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < \eta\}, \quad [x_0-\eta, x_0+\eta] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| \leqslant \eta\}.$$

Exemple 22 (Écriture avec valeurs absolues d'intervalles plus généraux)
Montrer que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leqslant b$, alors

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}\right\}, \quad]a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\}.$$

Illustrer la première égalité sur un dessin.

En résumé, la valeur absolue est une quantité très efficace pour traduire des conditions d'appartenance à un certain intervalle. Nous utiliserons régulièrement ce genre de choses en analyse.

2. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

2.1. Principes généraux de raisonnement

Rien de bien nouveau dans cette partie par rapport aux classes antérieures. On formalise simplement différents types de raisonnements rencontrés jusqu'alors pour résoudre des équations et inéquations, à l'aide des rudiments de logique développés dans le chapitre de logique. Commençons par rappeler des erreurs cruciales à ne pas commettre.

Attention Au sujet des divisions / factorisations

- Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle.
- Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$ *(sauf si a et b sont de même signe, auquel cas il convient de le préciser!)* . Mais, on rédige sou-

vent la condition en utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 \\ &\iff (a-b)(a+b) = 0 \quad \textit{identité remarquable} \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b. \quad \textit{équation produit-nul} \end{aligned}$$

Comment procéder pour résoudre une équation ? Plusieurs méthodes s'offrent à nous.

Méthode 1 **(Résolution d'une équation ou inéquation)** Étant donnée une équation ou une inéquation,

- **[Domaine de résolution]** On commence par déterminer le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans le domaine de résolution** de l'équation (ou inéquation). Ce domaine de résolution s'obtient en exprimant des conditions naturelles d'existence des quantités mises en jeu (présente d'un logarithme, d'une racine carrée, d'un quotient, ...)
- **[Résolution de l'équation]** On raisonne ensuite par équivalences pour déterminer l'ensemble des solutions du problème posé.
- **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geqslant g(x)$ avec f et g deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Notation **Ensemble de solutions**

- L'ensemble des solutions *(sous-ensemble du domaine de définition)* est souvent noté $\mathscr{S}$.
- Lorsque l'on cherche les solutions uniquement dans un certain ensemble E, on notera $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}$ les solutions appartenant à E. En d'autres termes : $\mathscr{S}_{\mathrm{E}} = \mathscr{S} \cap \mathrm{E}$.
- Lorsque $\mathrm{E} =]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$, on notera plus simplement $\mathscr{S}_{\leqslant a}$. De-même pour $\mathscr{S}_{<a}, \mathscr{S}_{\geqslant a}, \mathscr{S}_{>a}$.

Attention

Il ne suffit pas d'écrire sur sa feuille un symbole « $\iff$ » pour prouver ladite équivalence ! Si certaines ne sont pas évidentes, une justification précise est attendue *(surtout si on élève au carré une inégalité...)*

2.2. Résolution des équations avec des produits et des quotients

En cas de présence de produits/de quotients, on intègre les réflexes suivants lorsqu'on cherche à résoudre une (in)équation :

- tout passer du même côté pour comparer à 0, *(histoire de se ramener à une étude de signe)*
- tout mettre sur le même dénominateur le cas échéant, *(si présence de fractions)*
- factoriser au maximum. *(car il est pratique d'étudier le signe d'un produit/d'un quotient)* .

Méthode 2 **(Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient)** Soient A et B deux réels.

- $\mathrm{AB} = 0 \iff \mathrm{A} = 0$ ou $\mathrm{B} = 0$.
- $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = 0 \iff \mathrm{A} = 0$ (et $\mathrm{B} \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour $\mathrm{AB} \leqslant 0$ ou $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \leqslant 0$, on dresse un **tableau de signe** pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.
- Lorsque le membre de droite n'est pas $= 0, \leqslant 0, \geqslant 0$, on passe tout d'un côté et on applique les méthodes précédentes.

2.3. Cas polynomial

ÉTUDE DE $ax + b$, $a \neq 0$. Tout se cache dans le tableau de signe.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Exemple 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

- $x(x+2) = 2x(3x-4)$.

- $(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3)$.

- $\dfrac{2}{x} \geq \dfrac{4}{x+4}$.

ÉTUDE DE ax^2+bx+c, $a \neq 0$. On reprend les formules vues au lycée pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels. Elles seront généralisées dans le chapitres sur les nombres complexes, aux cas de coefficients complexes.

Considérons un trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en mettant le trinôme sous forme « canonique »[2]. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right)\right]. \end{aligned}$$

forme canonique

Le terme entre crochet ressemble à une identité remarquable de la forme « a^2-b^2 ». Deux cas se présentent, en notant $\Delta = b^2-4ac$:

- si $\Delta > 0$:
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right), \end{aligned}$$
identité remarquable

  donc : $\quad ax^2+bx+c=0 \iff x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad$ ou $\quad x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$:
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2, \end{aligned}$$
  donc : $\quad ax^2+bx+c=0 \iff x=-\dfrac{b}{2a}$.
- si $\Delta < 0$, alors
$$ax^2+bx+c = a\left[\underbrace{\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}\underbrace{-\frac{\Delta}{4a^2}}_{>0}}_{>0}\right] \quad \text{avec } a \neq 0,$$
  donc $\;ax^2+bx+c \neq 0\;$ et l'équation $\;ax^2+bx+c=0\;$ n'admet donc pas de solution dans $\mathbb{R}$.

On arrive tout droit au théorème suivant, déjà énoncé en classe de Première.

2. C'est-à-dire sans facteur en x

Théorème 3 | Second degré sur $\mathbb{R}$

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$.
On cherche les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ d'inconnue x. On appelle *discriminant* la quantité $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$ l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions réelles distinctes (appelées *racines simples du trinôme*) :
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\quad\text{et}\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta=0$ alors il n'y a qu'une solution réelle (appelée *racine double du trinôme*) définie par $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta<0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

De plus, on connait le signe de l'expression $\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$ pour tout nombre réel x.

Proposition 19 | Signe d'un trinôme

On note $\mathrm{P}: x\longmapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

- Si $\Delta>0$, le tableau de signe de P est donné par :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de P		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

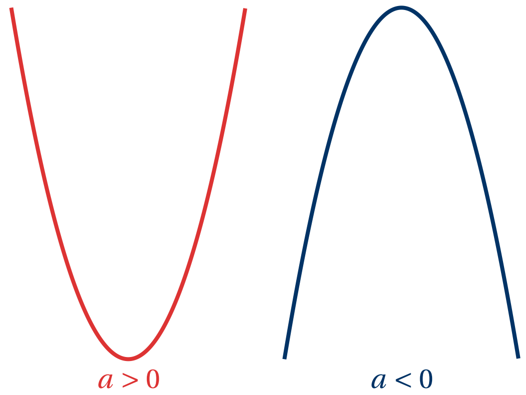
- Si $\Delta=0$, le tableau de signe de P est donné par

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de P		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta<0$, le tableau de signe de P est donné par

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de P		signe de a	

Le signe de a dicte l'allure de la courbe représentative du trinôme :



Le signe de Δ indique de nombre de points d'annulation du trinôme. Un cas particulier à retenir est le suivant : si le trinôme ax^2+bx+c possède deux racines distinctes, le trinôme est « du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

Exemple 24 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante.

- $-2x^2+5x+3=0$

- $-2x^2+5x+3>0$

Exemple 25 Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit P le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{P}(x) = 2x^2 + (2m+2)x + m^2 - 1.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet-elle une unique solution ? Quelle est alors cette solution ?

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\boxed{(\mathrm{E}) \quad ax^2 + bx + c = 0}$$

on ne calcule le discriminant Δ que dans les cas indispensables, il existe certains cas particuliers permettant d'économiser beaucoup de temps de calcul.

Étude de $ax^2 + c$, $a \neq 0$ (cas $b = 0$). L'équation (E) s'écrit alors :

$$(\mathrm{E}) \quad ax^2 + c = 0 \iff x^2 = -\frac{c}{a}.$$

On se ramène alors à une équation du type $x^2 = k$ en ayant posé $k = -\frac{c}{a}$.

Proposition 20 | Résolution de l'équation $x^2 = k$

Soit $k \in \mathbb{R}$, considérons l'équation $x^2 = k$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- si $k > 0$, $x^2 = k \iff x = \sqrt{k}$ **ou** $x = -\sqrt{k}$

  Note | *Prenez garde à ne pas oublier cette deuxième solution !*
- si $k = 0$, $x^2 = 0 \iff x = 0$.
- si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Preuve

- si $k > 0$, alors k possède une racine carrée et

$$\begin{aligned} x^2 = k &\iff x^2 = \left(\sqrt{k}\right)^2 \\ &\iff x^2 - \left(\sqrt{k}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x - \sqrt{k}\right)\left(x + \sqrt{k}\right) = 0 \\ &\iff x = \sqrt{k} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{k}. \end{aligned}$$

- L'équivalence $x^2 = 0 \iff x = 0$ est évidente.
- si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque $x^2 \geq 0$ tandis que $k < 0$: un nombre réel positif ne peut pas être égal à un nombre réel strictement négatif !

Exemple 26 Résoudre *rapidement* dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 7 = 0$.

Étude de $ax^2 + bx$, $a \neq 0$ (cas $c = 0$). L'équation (E) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} (\mathrm{E}) \quad ax^2 + bx = 0 &\iff x(ax+b) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Bref, un facteur commun apparaît, pas besoin là encore de calculer Δ !

Étude de $a^2x^2 + 2abx + b^2$, $a \neq 0$ (identité remarquable). Si l'on reconnaît le développement d'une identité remarquable, la résolution est très rapide (on obtient alors une unique solution).

Exemple 27 Résoudre *rapidement* dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2+4x+1=0$.

Cas de racines évidentes. Cette dernière méthode, certainement nouvelle pour la plupart d'entre vous, est très élégante à mettre en pratique. Elle est basée sur la proposition suivante.

Proposition 21 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 2

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$, tels que $\Delta>0$, où $\Delta=b^2-4ac$. Notons x_1,x_2 les deux solutions de $ax^2+bx+c=0$. Alors : $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$ et $\boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}}$.

Ainsi, connaissant une racine, on peut facilement obtenir l'autre.

Preuve On sait que $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Alors :

Exemple 28 Pour les équations qui suivent, déterminer une solution évidente (*i.e.* dans $\{-2,-1,0,1,2\}$), puis en déduire la deuxième.

- $3x^2-2x-1=0$
- $x^2-2024x-2025=0$

Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3. Tout ce qui suit deviendra plus naturel lorsque nous traiterons les polynômes dans le chapitre sur les polynômes.

Méthode 3 (Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3)

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :
  - soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
  - soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0)=0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme
  $$A(x)=(x-x_0)B(x)$$
  pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x-x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Exemple 29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3-4x^2+x+2=0$. On pourra commencer par chercher $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3-4x^2+x+2=(x-1)(ax^2+bx+c).$$

2.4. Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DE $\exp, \ln$. Les fonctions $\exp, \ln$ seront revues un peu plus tard, mais rappelons un kit de survie concernant leurs propriétés.

Proposition 22 | Quelques propriétés de $\exp$ et $\ln$

- **[Exponentielle]**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (e^x)^n = e^{nx}.$$

- **[Logarithme]**

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(x^n) = n \ln x.$$

- **[Réciprocité]**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad e^{\ln x} = x.$$

UTILISER LES PROPRIÉTÉS DE $\ln, \exp$. L'idée est d'essayer d'appliquer $\ln$ ou $\exp$ de chaque côté afin de simplifier l'équation.

Exemple 30 Résoudre les (in)équations suivantes.

1. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

2. $e^{x+1}e^{3x-4} > 1$.

ÉLEVER AU CARRÉ. L'idée est d'essayer d'élever au carré afin de supprimer d'éventuelles racines. Attention : on rappelle qu'on ne peut élever au carré n'importe comment une inégalité ! Il faut toujours prendre la précaution de savoir si les membres sont positifs.

Exemple 31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x = \sqrt{2-x}$.

L'équation est définie sur $]-\infty, 2]$. *Pour élever eu carré et conserver l'équivalence, on doit avoir des termes positifs.*

- ***[Cas 1]*** *Si* $x \leqslant 0$, *alors l'équation n'a pas de solution car on aurait* $\sqrt{2-x} < 0$. *Ainsi,* $\mathscr{S}_{<0} = \emptyset$.
- ***[Cas 2]*** *Si* $x \geqslant 0$, *alors puisque la fonction carré est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *:*

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2-x} &\iff x^2 = 2-x \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x+2) = 0 \\ &\iff x \in \{1, -2\}. \end{aligned}$$

Donc : $\mathscr{S}_{\geqslant 0} = \{1\}$. *(on ne garde que les solutions dans le domaine de définition)*

Conclusion : $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{<0} \cup \mathscr{S}_{\geqslant 0} = \boxed{\{1\}}$.

Exemple 32 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x^2+2x} < x+1$.

La fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ *est un trinôme de racines* 0 *et* -2, *l'équation est donc définie sur* $]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[$. *Pour élever eu carré et conserver l'équivalence, on doit avoir des termes positifs.*

- ***[Cas 1]*** *Si* $x < -1$, *alors l'équation n'a pas de solution car on aurait* $\sqrt{x^2+2x} < 0$. *Ainsi,* $\mathscr{S}_{<-1} = \emptyset$.
- ***[Cas 2]*** *Si* $x \geqslant -1$, *alors puisque la fonction carré est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *:*

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2x} < x+1 &\iff x^2 + 2x < (x+1)^2 \\ &\iff \cancel{x^2} + \cancel{2x} < \cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 \\ &\iff 0 < 1, \quad \textit{toujours vraie.} \end{aligned}$$

Donc : $\mathscr{S}_{\geqslant -1} = [-1, +\infty[\cap (]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[) = [0; +\infty[$. *(on ne garde que les solutions dans le domaine de définition)*

Conclusion : $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{<-1} \cup \mathscr{S}_{\geqslant -1} = \boxed{[0; +\infty[}$.

UTILISER UN CHANGEMENT DE VARIABLE. Il s'agit de poser un changement de variable du type $X = e^x$ ou $X = \ln(x)$ ou $X = x^2$ ou $X = \sqrt{x}$... pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre (en général polynomiale). Dans les exercices, le changement de variable éventuel à réaliser sera toujours donné.

Attention

Attention, une fois les valeurs possibles de X trouvées, il ne faut pas oublier de revenir aux solutions en x pour conclure.

Exemple 33 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ et $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$.

2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$.

ENLEVER LES VALEURS ABSOLUES. Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qu'il y a à l'intérieur. On peut donc étudier le signe de l'expression dans la valeur absolue puis faire une disjonction de cas pour résoudre l'(in)équation obtenue sans la valeur absolue dans chacun des cas possibles.

Exemple 34 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x-4| = 2x+10$.

- ***[Cas 1]*** *Si $x \geqslant 4$, alors $x-4 \geqslant 0$ donc l'équation est :*
$$|x-4| = 2x+10 \iff x-4 = 2x+10 \iff x = -14.$$
Ainsi, comme $-14 \ngeqslant 4$, on a $\mathscr{S}_{\geqslant 4} = \emptyset$.
- ***[Cas 2]*** *Si $x < 4$, alors $x-4 < 0$ donc l'équation est :*
$$|x-4| = 2x+10 \iff 4-x = 2x+10 \iff x = -14.$$
Ainsi, comme $-14 \ngeqslant 4$, on a $\mathscr{S}_{\geqslant 4} = \emptyset$.

2. $|3-x| > |x+2|$. *Quand il y a plusieurs valeurs absolues, il peut être judicieux de commencer par dresser un tableau de signe*

RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS PAR UNE ÉTUDE DE FONCTION. Si on souhaite montrer qu'une inéquation est vraie pour tout x dans un certain sous-ensemble E (de $\mathbb{R}$), ou même vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que l'on n'y parvient pas par inégalités successives, on peut essayer d'étudier les variations d'une certaine fonction.

Méthode 4 **(Pour montrer « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$ »)** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
- On définit la fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

Commençons par un exemple complet.

Exemple 35 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\quad e^x \geqslant x+1$.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - x - 1$. La fonction f est dérivable car somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \exp(x) - 1$. Ainsi, si $x > 0$ alors $f'(x) > 0$ et si $x < 0$ alors $f'(x) < 0$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variations f admet 0 pour minimum sur $\mathbb{R}$ et l'atteint en 0. On a donc montré que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ et, par suite, $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$.

Exemple 36 Montrer que : $\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x$.

On pose f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$\forall x > -1, \quad f(x) = \ln(1+x) - x$.

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et :

$$\forall x > -1, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

On dresse alors le tableau des variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Comme $f(0) = 0$, on a que pour tout $x > -1$, $\quad f(x) \leqslant 0$. Ainsi :

$\boxed{\forall x > -1, \quad \ln(1+x) \leqslant x}$.

2.5. Rappel : systèmes de 2 équations à 2 inconnues

On rappelle, au travers de deux exemples, les techniques de résolution de systèmes vues au lycée. Rappelons brièvement les deux principes :

- **[Substitution]** on isole une inconnue dans l'une des deux équation, pour la remplacer dans l'autre.
- **[Combinaison]** on effectue des opérations de la forme $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ou $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$ pour éliminer une inconnue.

Exemple 37 (Substitution) Résoudre par substitution le système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} 4x + \ \ y = 7 \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

Exemple 38 (Combinaison) Résoudre par combinaisons le système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} 4x + \ \ y = 7 \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

3. PARTIES MAJORÉES, MINORÉES DE $\mathbb{R}$ & PARTIE ENTIÈRE

3.1. Minorant, majorant, borne inférieure/supérieure

Définition 6 | Majorant, minorant

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est *majoré* si :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \leqslant M.$$
On dit alors que M est ***un*** *majorant* de l'ensemble A.
- On dit que A est minoré si :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \quad a \geqslant m.$$
On dit alors que m est ***un*** *minorant* de l'ensemble A.
- Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit *borné*, c'est-à-dire lorsque :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall a \in A, \quad m \leqslant a \leqslant m.$$

Exemple 39

- L'ensemble $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$ mais il est minoré par 0.
- L'ensemble $[0,1[$ est minoré par 0 et majoré par 1 car :
$$\forall x \in [0,1[, \quad 0 \leqslant x < 1 \leqslant 1.$$

Attention

Un ensemble majoré (*resp.* minoré) admet une infinité de majorant (*resp.* de minorants). En effet, si M est un majorant, alors M + 1 en est un aussi.

Exemple 40 (Négation) Écrire la négation de « A est minoré », puis « A est majoré ».

Proposition 23 | Partie bornée et valeur absolue

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Alors :
$$A \text{ est borné} \iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in A, \quad |x| \leqslant M.$$

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant R$. Alors, pour $x \in A$ on a :
$$-R \leqslant x \leqslant R$$
Le réel R est donc un majorant de A et −R est un minorant de A, l'ensemble A est ainsi borné.

0

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est borné, soit alors M un majorant de A et m un minorant de A. On cherche $R \geqslant 0$ tel que : $\quad \forall x \in A, \quad |x| \leqslant R$. Pour $x \in A$ on a :
$$x \leqslant M \leqslant |M|, \qquad x \geqslant m \geqslant -|m|.$$
Posons $R = \max\{|M|, |m|\}$, on a alors $|M| \leqslant R$ et $-|m| \geqslant -R$.
Ainsi, pour tout $x \in A$ on a $-R \leqslant -|m| \leqslant x \leqslant |M| \leqslant R$, c'est-à-dire : $\quad |x| \leqslant R$.

0

Exemple 41

- L'ensemble $]1,3]$ est
  borné
- L'ensemble $]-\infty, 4]$ est
  majoré mais n'est pas minoré
- $\mathbb{N}$ est
  minoré mais n'est pas majoré
- $\mathbb{Q}$
  n'est ni majoré, ni minoré

Définition 7 | Minimum, maximum

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- **[Maximum]** On dit que A *admet un maximum* M si :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \text{A est majoré par M,} \\ \textbf{(ii)} & M \in A. \end{cases}$$
- **[Minimum]** On dit que A *admet un minimum* m si :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \text{A est minoré par } m, \\ \textbf{(ii)} & m \in A. \end{cases}$$
- Un minimum ou un maximum est appelé un *extremum*.

Proposition 24 | Unicité

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A possède un maximum, il est unique et on le note max(A).
- Si A possède un minimum, il est unique et on le note min(A).

Preuve Faisons par exemple la preuve pour le cas du maximum par exemple. Supposons qu'il existe M, M′ deux maximum de A, et montrons que M = M′.

Exemple 42 Montrer que l'ensemble $A = [0, 2[$ admet un minimum et que 2 majore A. L'ensemble A possède-t-il un maximum ?

Considérons à nouveau l'intervalle $A = [0, 2[$. Ici, les réels 0 et 2 jouent un rôle particulier.

- 0 est un minorant, et il ne semble pas y en avoir de plus grand, et il **est dans** A. On dira que 0 est la « borne inférieure de A », et même un « minimum de A » car il appartient à l'ensemble comme nous l'avons vu.
- 2 est un majorant, et il ne semble pas y en avoir de plus petit, et il **n'est pas** dans A. On dira que 2 est la « borne supérieure de A ».

Formalisons cela dans la définition/proposition qui suit.

Définition/Proposition 3 | Borne supérieure/inférieure

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.
- **[Borne supérieure]** Si A est majoré, alors A admet un plus petit majorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus petit de ces majorants, noté $\sup A$.

  Note | *« Toute partie non-vide et majorée possède une borne supérieure »*
- **[Borne inférieure]** Si A est minoré, alors A admet un plus grand minorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus grand de ces minorants, noté $\inf A$.

  Note | *« Toute partie non-vide et minorée possède une borne inférieure »*

Nous admettons l'existence d'un plus petit/grand majorant/minorant sous les hypothèses mentionnées (toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure).

Exemple 43 Si $A = [0, 2[$, on a :

$$\inf A = \min A = 0 \quad \text{et} \quad \sup A = 2.$$

[H.P] Démontrons que : $\sup A = 2$. *(Dans la pratique, sur la notion de* $\inf, \sup$*, on attend de vous seulement une intuition.)*

Proposition 25 | Lien avec le maximum / minimum

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.
- Si A est majorée **et** $\sup A \in A$, alors A possède un maximum et :
$$\max A = \sup A.$$
- Si A est minorée **et** $\inf A \in A$, alors A possède un minimum et :
$$\min A = \inf A.$$

Attention

Un ensemble n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Mais, pour nous, toujours une borne supérieure ou inférieure car nous travaillerons avec des parties non vides majorées ou minorées.

Remarque 7 **(Un peu d'orthographe)** L'Académie Française recommande d'utiliser le pluriel « à la française » pour les mots latins finissant en « - um » comme « maximum », « minimum » ou « extremum ». En revanche, en Mathématiques, nous utiliserons des pluriels latins c'est-à-dire : « maxima », « minima » et « extrema ».

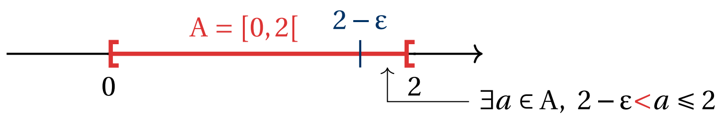
Exemple 44 On considère les ensembles suivants

$$A = [1,2], \quad B =]-\infty, 3], \quad C =]0,4[, \quad D =]1,+\infty[, \quad E = \mathbb{N}, \quad F = \mathbb{R}^{+\star}.$$

Préciser si ces ensembles admettent un maximum ou minimum, et donner sa valeur le cas échéant.

-
-
-
-
-
-

Remarque 8 **(Caractérisation de la borne supérieure / inférieure [H.P])**
Pour terminer, on souhaite traduire mathématiquement (à l'aide de quantificateurs) les portions d'assertions « plus petit majorant » et « plus grand minorant » apparaissant dans la Définition/Proposition 3. Reprenons l'exemple de $A = [0,2[$. On a $2 = \sup A$, mais comment traduire que c'est le plus petit majorant ?



Si on se fixe $\varepsilon > 0$, alors $2-\varepsilon$ ne sera pas un majorant, c'est-à-dire il existe $a \in A$ de sorte que $2-\varepsilon < a \leqslant 2$. On peut traduire de la même façon le fait d'avoir un plus grand majorant, ce qui nous mènerait au résultat suivant : soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$, alors

- **[Borne supérieure]** Si A est majoré, alors :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & M \text{ est un majorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ M-\varepsilon \text{ n'est pas un majorant,} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ M-\varepsilon < a \leqslant M. \end{cases}$$

- **[Borne inférieure]** Si A est minoré, alors :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & m \text{ est un minorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ m+\varepsilon \text{ n'est pas un minorant,} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ m \leqslant a < m+\varepsilon. \end{cases}$$

3.2. Partie entière

On souhaite définir mathématiquement l'action d'ôter la partie décimale d'un nombre réel, c'est-à-dire transformer par exemple 1.1 en 1. Comment définir mathématiquement une telle transformation ?

Définition/Proposition 4 | Partie entière
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière de* x l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, vérifiant :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Ainsi,

- tout réel x est « coincé » entre deux entiers consécutifs.
- La partie entière de x est l'unique entier relatif k tel que $x \in [k, k+1[$, de sorte que $x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[$.

Attention
Attention aux confusions entre $\leqslant, <$.

- Si vous confondez les deux symboles, alors on change complètement la notion. *(par exemple, si on avait pris comme définition $\lfloor x \rfloor < x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, alors on aurait $\lfloor 5 \rfloor = 4$... curieux non ?)*
- Si vous oubliez d'utiliser une inégalité stricte, c'est pire, il n'y a plus unicité.

Contrairement aux apparences, l'existence de la partie entière n'est pas du tout triviale. Nous l'admettrons largement dans le contexte de ce cours et nous démontrons ci-après l'unicité.

Preuve Nous devons maintenant justifier l'existence et l'unicité de la partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence. (très partielle) Considérons $\mathrm{N}_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ l'ensemble des entiers inférieurs à x. Nous admettons que N_x est non vide, cet ensemble est majoré par x. Il admet donc une borne supérieure que l'on note $\lfloor x \rfloor = \sup(\mathrm{N}_x)$. On admet que cette quantité convient.

Unicité. Supposons que $m, n \in \mathbb{Z}$ conviennent pour la partie entière de x. Alors :

$$n \leqslant x < n+1, \quad m \leqslant x < m+1.$$

On peut supposer que $n < m$, sinon on inverse les rôles. Alors en combinant les deux encadrements, on a :

$$n < m \leqslant x < n+1 < m+1.$$

En particulier, $n < m < n+1$. On aurait donc qu'un entier m serait compris strictement entre deux entiers consécutifs $n, n+1$ — absurde.

Exemple 45 Calculer les parties entières ci-après.

- $\lfloor 3.1 \rfloor$

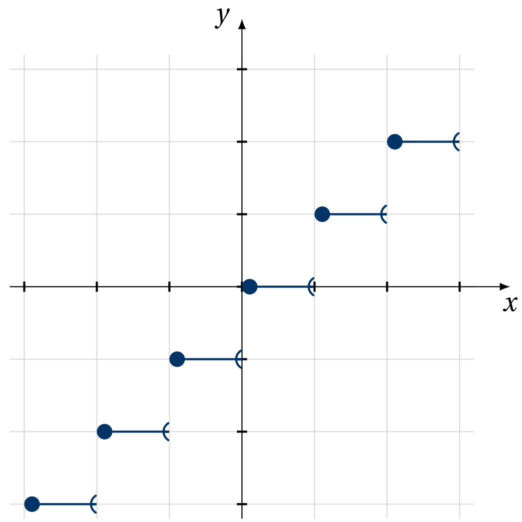
  $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ *car* $3 \leqslant 3.1 < 3,$
- $\lfloor 12 \rfloor$

  $\lfloor 12 \rfloor = 12,$ *car* $12 \leqslant 12 < 13,$
- $\lfloor -4.5 \rfloor$

  $\lfloor -4.5 \rfloor = -5,$ *car* $-5 \leqslant -4.5 < -4,$
- $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$

  $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2,$ *car* $2 \leqslant \frac{7}{3} < 3.$

La définition de la partie entière permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$.



Courbe représentative de la partie entière

Exemple 46 **(Équations avec parties entières)** Résoudre les équations ci-dessous.

1. $\lfloor 2x \rfloor = 1$

2. $5 < \lfloor 3x \rfloor \leqslant 7$

3. $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{2} \right\rfloor = 3$

Proposition 26 | Reformulation de la définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, *i.e.* :
$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}.$$
- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, tel que :
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

(Partie entière d'un réel) Il s'agit ici de chercher le plus grand entier inférieur ou égal à un réel : c'est un cas typique d'utilisation d'un `while`. En effet, nous ne sommes pas capables de prédire à l'avance le nombre d'itérations. Il faut distinguer le cas positif ou négatif.

```python
def part_entiere(x):
    """
    Calcule la partie entière de x positif
    """
    n = 0
    while n <= x :
        n += 1 # en sortie de boucle : n désigne le premier \
        ↪ entier >x, on renvoie donc n-1
    return n-1
>>> part_entiere(2)
2
>>> part_entiere(2.1)
2
```

3.3. Notion de valeur approchée

Dans différents contextes au cours de l'année, nous parlerons de valeur approchée d'une certaine grandeur x, à une précision fixée. Voyons une définition rigoureuse.

Définition 8 | Être une valeur approchée de...

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On dit que y *est une valeur approchée de x à ε-près*, si :
$$d(x,y) < \varepsilon \iff |x-y| < \varepsilon \quad (\iff |y-x| < \varepsilon).$$

Note | *Puisque $|x-y| = |y-x|$, y est une valeur approchée de x à ε-près si et seulement si x est une valeur approchée de y à ε-près*

Exemple 47

- 1.1234 est une valeur approchée de 1.1223 à $\varepsilon = 10^{-2}$-près.
  En effet, $|1.1234 - 1.1223| = |0.0011| = 0.0011 < 0.01 = 10^{-2}$.
- 1.1234 n'est pas une valeur approchée de 1.7777 à $\varepsilon = 10^{-2}$-près.
  En effet, $|1.1234 - 1.7777| = |0.6543| = 0.6543 \not< 0.01 = 10^{-2}$.

Remarque 9 (Interprétation) *(très petit dans la pratique)* Supposons que $\varepsilon = 10^{-k} \in [0,1[$ avec $k \in \mathbb{N}^\star$. Alors « y est une valeur approchée de x à ε-près » signifie que y et x sont de même partie entière, et partagent au moins k chiffres après la virgule.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode 1 (Résolution d'une équation ou inéquation) Étant donnée une équation ou une inéquation,

- **[Domaine de résolution]** On commence par déterminer le domaine de résolution de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans le domaine de résolution** de l'équation (ou inéquation). Ce domaine de résolution s'obtient en exprimant des conditions naturelles d'existence des quantités mises en jeu (présente d'un logarithme, d'une racine carrée, d'un quotient, ...)
- **[Résolution de l'équation]** On raisonne ensuite par équivalences pour déterminer l'ensemble des solutions du problème posé.
- **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geqslant g(x)$ avec f et g deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f-g$ (à l'aide de la dérivée).

Méthode 2 (Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient) Soient A et B deux réels.

- $AB = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.
- $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ (et $B \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour $AB \leqslant 0$ ou $\dfrac{A}{B} \leqslant 0$, on dresse un **tableau de signe** pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.
- Lorsque le membre de droite n'est pas $= 0, \leqslant 0, \geqslant 0$, on passe tout d'un côté et on applique les méthodes précédentes.

Méthode 3 (Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3)

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable (voir plus loin).
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :
  - soit on factorise directement en repérant un facteur commun,
  - soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0) = 0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme
  $$A(x) = (x - x_0)B(x)$$
  pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x - x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Méthode 4 (Pour montrer « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x)$ ») Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

- On définit la fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Somme et produit des racines d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $a\neq 0$	*Notant x_1, x_2 les deux racines,* $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}, x_1x_2=\dfrac{c}{a}$	*À retrouver rapidement si besoin à l'aide des formules* $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
Donner la définition de la partie entière d'un réel x	*Soit $x\in\mathbb{R}$, c'est l'unique entier $n\in\mathbb{Z}$ vérifiant $n\leqslant x<n+1$*	*Attention aux inégalités strictes et larges : on ne les met pas au hasard. Il est important aussi de connaître le graphe (et de mentionner les points d'ouverture/fermeture de la courbe)*
Minorant et minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$	*Si $A\subset\mathbb{R}$, un minorant m de A vérifie : $\forall a\in A, a\geqslant m$, un minimum est un minorant appartenant à la partie*	*Savoir aussi que le plus grand minorant est ce que l'on appelle la borne inférieure de A, notée $\inf A$.*

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Sur les ensembles de nombres :
   - les ensembles classiques ☐
   - les propriétés de l'addition et la multiplication des réels ☐
   - les règles de calcul dans $\mathbb{Q}$ ☐
   - les règles sur les puissances, les racines, ☐
   - les identités remarquables ☐
2. Sur la relation d'ordre des réels :
   - les propriétés de la relation d'ordre ☐
   - les compatibilités ☐
   - le cas des puissances ☐
   - la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$ ☐
   - les propriétés de la valeur absolue ☐
   - l'inégalité triangulaire ☐
3. Sur les bornes d'ensembles :
   - connaître la définition d'un majorant et d'un minorant ☐
   - connaître la définition d'un maximum et d'un minimum ☐
   - savoir définir la borne supérieure et la borne inférieure ☐
   - savoir définir la partie entière, connaître les propriétés ☐
4. Sur les résolutions d'équations & d'inéquations ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler : **1/2/3/4/5/6**

Exercice 1 | 👁 **Un peu de logique** [Solution] Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x\in\mathbb{R}^+, \exists y\in\mathbb{R}, x=y^2$.
2. $\exists y\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}^+, x=y^2$.
3. $\exists x\in\mathbb{R}^+, \forall y\in\mathbb{R}, x=y^2$.
4. $\forall x\in\mathbb{R}^+, \exists y\in\mathbb{R}^+, x=y^3$.
5. $\forall x\in\mathbb{R}, \exists!\, y\in\mathbb{R}, x=y^3$.
6. $\forall x\in\mathbb{R}, \exists y\in\mathbb{R}^+, x=y^3$.

4.1. Puissances & Racines

Exercice 2 | **Puissances** [Solution]

1. Factoriser les expressions suivantes (n est un entier naturel) :
$$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 3^{2n}, \quad B = \frac{2}{4^n} - 5 \times 2^{-2n-1} + 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^\star$. Réduire les expressions suivantes :
$$A = x^{-1} \times \frac{x^9}{x^5}, \quad B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3}, \quad C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4}.$$

Exercice 3 | **Racines** [Solution] Simplifier les expressions suivantes.

- $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$,
- $B = \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}\right)^2$,
- $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, on précisera notamment le domaine de validité.
- $D = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$.

4.2. Équations et inéquations

Exercice 4 | **Polynômes** [Solution] Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$,
2. $(x-1)^2 \leqslant 1$,
3. $32x^6 - 162x^2 < 0$,
4. $\dfrac{2x}{4x^2 - 1} \leqslant \dfrac{2x+1}{4x^2 - 4x + 1}$,
5. $\dfrac{x^4 + x}{x^4 - 5x^2 + 4} < 1$,
6. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x}$,
7. $\dfrac{2x+1}{1+x} \geqslant \dfrac{3x-2}{1+x}$,
8. $\dfrac{x^2 + 10x - 4}{x-2} \leqslant \dfrac{16x+2}{x+1}$,
9. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geqslant 0$, *on constatera que* 1 *est racine évidente*
10. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$, *on constatera que* 2 *est racine évidente.*

Exercice 5 | **Puissances, exponentielles et logarithmiques** [Solution] Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$,
2. $|\ln x| < 1$,
3. $\ln(2x+4) - \ln(6-x) = \ln(3x-2) - \ln(x)$,
4. $2e^{2x} - e^x - 1 \leqslant 0$,
5. $4e^x - 3e^{\frac{x}{2}} \geqslant 0$,
6. $2\ln(x) + \ln(2x-1) > \ln(2x+8) + 2\ln(x-1)$.

Exercice 6 | **Avec radicaux** [Solution] Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $\sqrt{x+1} = x - 1$,
2. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} \leqslant 1$,
3. $\sqrt{x^2 - 3} > 5x - 9$,
4. $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geqslant 2x - 1$,
5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$,

Exercice 7 | **Avec valeurs absolues** [Solution] Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $x^2 = |x|$,
2. $|2x-3| \leqslant 2$,
3. $|2+x| + 2 + 2x = x^2$,
4. $|2x+3| - |-5x+6| \geqslant 3x + 2$,
5. $\sqrt{x^2 - x - 2} \geqslant |3x+2|$,

Exercice 8 | **Avec étude de fonction** [Solution] En utilisant une fonction, répondre aux questions ci-après.

1. $\forall x > 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\quad e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 1$.

Exercice 9 | [Solution]

1. Justifier que : $\quad \forall x \in]0,1[, \quad x^2 < x < \sqrt{x}$.
2. En déduire : $\quad \forall x \in]0,1[, \quad x + x^2 < 2\sqrt{x}$.

Exercice 10 | **Inégalité de Young** [Solution]

1. Montrer que pour tous réels a et b : $\quad |ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$. *Indication : On pourra considérer le développement de* $(|a| - |b|)^2$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\quad \sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

Exercice 11 | **Équations à paramètres** [Solution] Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$,
2. $(m+1)x + 2 - m = 0$,
3. 💣 $e^{2x} - 2me^{x} + 1 = 0$,

Exercice 12 | **Inéquations avec paramètre** [Solution] Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2 - (m+1)x + m \geqslant 0$,
2. 💣 $\dfrac{m}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x+2}$,
3. 💣 $\sqrt{2x+m} \geqslant x+1$.

4.3. Partie entière

Exercice 13 | 👁 **Équations/Inéquations** [Solution] Résoudre :

1. $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$,
2. $-1 \leqslant \lfloor 2x+1 \rfloor < 1$.

Exercice 14 | 👁 [Solution] Montrer que tout entier positif n non nul, il existe un entier positif p tel que : $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$, donner une expression de cet entier en fonction de n.

Exercice 15 | 👁 [Solution] Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 16 | 💣 [Solution] Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

4.4. Maximum et minimum, borne supérieure et inférieure

Exercice 17 | [Solution] Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Le nombre -7 est un majorant de A.
2. Le nombre 2 n'est pas un minorant de A.
3. La partie A est bornée.
4. Le nombre $\sqrt{\pi}$ est un minorant de A.
5. La partie A n'est pas majorée.
6. Le nombre 1 est la borne supérieure de A.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé] Étude de chaque assertion :

1. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
2. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq y^2$.
3. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
4. Vrai : car tout réel x possède une racine cubique y, en particulier tout réel positif aussi. On peut constater que si $x \geqslant 0$ alors $y = \sqrt[3]{x} \geqslant 0$ (voir la courbe de la fonction cube par exemple).
5. Vrai : existence et unicité de la racine cubique.
6. Faux : pour $x = -1$, sa racine cubique est -1, qui n'est pas positive.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1.

$$\begin{aligned}
A &= 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 3^{2n} = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3 \times 9^n \\
&= 9^n\left(9 - 9^2 - 3\right) = 3.9^n\left(2 - 3^3\right) = \boxed{-3.5^2.9^n} \\
B &= \frac{2}{4^n} - 5 \times 2^{-2n-1} + 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{2^{2n}} - \frac{5}{2^{2n}.2} + \frac{7}{2^{2n}} \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\left(2 - \frac{5}{2} + 7\right) = \boxed{\frac{13}{2^{n+1}}.} \\
C &= 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n = 9^n(-1)^n - (-1)^n 9^n = \boxed{0.}
\end{aligned}$$

2.

$$A = x^{-1} \times \frac{x^9}{x^5} = \frac{x^8}{x^5} = \boxed{x^3},$$

$$B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3} = \frac{x^6}{x^{-6}} = 1$$

$$C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4} = \frac{x^{-3}y^2}{x^4y^{-4}} = \boxed{\frac{y^6}{x^7}.}$$

Solution (exercice 3) [Énoncé]

$$\begin{aligned}
A &= 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54} \\
&= 4\sqrt{3 \times 4 \times 2} - 5\sqrt{3 \times 4 \times 2 \times 4} + 4\sqrt{6 \times 3^2} \\
&= 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6} \\
&= \boxed{0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{(7 - 2\sqrt{6})(7 + 2\sqrt{6})} \\
&= 14 + 2\sqrt{49 - 4 \times 6} = \boxed{24}.
\end{aligned}$$

$$C = \sqrt{(2x+1)^2} = \boxed{|2x+1|} \quad \text{l'expression est définie sur } \mathbb{R}$$

$$D = \frac{\sqrt{9}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{3 - 2} = \boxed{6\sqrt{3}}.$$

Solution (exercice 4) [Énoncé] *Lorsque l'on envisage différents cas, on notera en abrégé $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots$ les ensembles de solutions trouvées dans ces sous-cas.*

1. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$.
2. $(x-1)^2 \leqslant 1 \iff x(x-2) \leqslant 0$ donc $\boxed{\mathscr{S} = [0, 2]}$.
3. On factorise par $2x^2$ puis on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2$ et on obtient :
   $$32x^6 - 162x^2 < 0 \iff 2x^2(16x^4 - 81) < 0 \iff 2x^2(4x^2 - 9)(4x^2 + 9) < 0.$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\smallsetminus \{0\}.}$
4. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2 - 1 \neq 0$ et $4x^2 - 4x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \smallsetminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
   On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
   $$\begin{aligned}
   \frac{2x}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{2x+1}{(2x-1)^2} \leqslant 0 &\iff \frac{2x(2x-1) - (2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \leqslant 0 \\
   &\iff \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)} \leqslant 0.
   \end{aligned}$$
   Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[.}$
5. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0 \iff (x^2 - 4)(x^2 - 1) \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, -1, 1, 2\}$.

On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :

$$\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4}-1<0 \iff \frac{5x^2+x-4}{(x^2-4)(x^2-1)}<0.$$

Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} =]-2,-1[\cup \left]-1,\frac{4}{5}\right[\cup]1,2[}$.

6. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $2x\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.
De plus, on a :
$$\frac{1}{x-2}\leqslant\frac{1}{2x} \iff \frac{x+2}{2x(x-2)}\leqslant 0$$
et un tableau de signe donne : $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty,-2[\cup]0,2[}$.
7. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x+1\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
$$\frac{2x+1}{x+1}\geqslant\frac{3x-2}{1+x} \iff \frac{-x+3}{1+x}\geqslant 0$$
et un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=[-1,3]}$.
8. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x-2\neq 0$ et $x+1\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.
$$\frac{x^2+10x-4}{x-2}\leqslant\frac{16x+2}{x+1} \iff \frac{x(x^2-5x+36)}{(x-2)(x+1)}\leqslant 0$$
donc un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty,-1[\cup[0,2[}$.
9. 1 est racine évidente et on obtient : $x^3+4x^2+x-6\geqslant 0 \iff (x-1)(x^2+5x+6)\geqslant 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=[-3,-2[\cup]1,+\infty[}$.
10. 2 est racine évidente et on obtient : $x^3-x^2-x-2<0 \iff (x-2)(x^2+x+1)<0$ et le discriminant de x^2+x+1 est négatif donc $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty,2[}$.

Solution (exercice 5) Énoncé

1. - Domaine de résolution : $\mathscr{D}=]2e,+\infty[$
   - On a : $\ln(x^2-4e^2)<1+\ln(3x) \iff x^2-3xe-4e^2<0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S}=]2e,4e[}$.
2. - Domaine de résolution : $\mathscr{D}=\mathbb{R}^{+*}$ car :
   $$\begin{cases} 2x+4 > 0 \\ 6-x > 0 \\ 3x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff x>0.$$
   - On distingue deux cas :
     - **[Cas 1]** si $x\geqslant 1$, alors $|\ln x|=\ln x$ et on doit résoudre $\ln x<1 \iff x<\mathrm{e}$, donc $\mathscr{S}_1=[1,\mathrm{e}[$.
     - **[Cas 2]** si $0<x<1$, alors $|\ln x|=-\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x<1 \iff x>\frac{1}{\mathrm{e}}$, donc $\mathscr{S}_2=\left]\frac{1}{\mathrm{e}},1\right[$.

   Ainsi, $\mathscr{S}=\mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2$, soit : $\boxed{\mathscr{S}=\left]\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right[}$.
3. - Domaine de résolution : $\mathscr{D}=\left]\frac{2}{3},6\right[$.
   - En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x+4)]=\ln[(3x-2)(6-x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x+4)=(3x-2)(6-x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{6}{5},2\right\}}$.
4. - Domaine de résolution : $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
   - On pose $\mathrm{X}=\mathrm{e}^x$ et on doit résoudre $2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1\leqslant 0$. On obtient $\mathrm{X}\in\left]-\frac{1}{2},1\right[$, soit $\mathrm{e}^x>-\frac{1}{2}$ et $\mathrm{e}^x<1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x<0$. On a donc : $\boxed{\mathscr{S}=[-\infty,0]}$.
5. - Domaine de résolution : $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
   - On pose $\mathrm{X}=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4\mathrm{X}^2-3\mathrm{X}\geqslant 0 \iff \mathrm{X}(4\mathrm{X}-3)\geqslant 0$. Ce qui est équivalent à $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant 0$ ou $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\geqslant\frac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathscr{S}=\left[2\ln\left(\frac{3}{4}\right),+\infty\right[}$.
6. - Domaine de résolution : $\mathscr{D}=]1,+\infty[$.
   - En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2-14x+8<0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathscr{S}=]1,2[}$.

Solution (exercice 6) Énoncé *Lorsque l'on envisage différents cas, on notera en abrégé $\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2,\ldots$ les ensembles de solutions trouvées dans ces sous-cas.*

1. - Domaine de définition : $\mathscr{D}=[-1,+\infty[$
   - Attention, pour pouvoir élever au carré, il faut que les termes des deux côtés soient du même signe ! Il faut toujours faire des cas :
     - **[Cas 1]** si $x<1$: on ne peut pas élever au carré. Une racine carrée étant toujours positive, on a $\mathscr{S}_{]-\infty,1[}=\emptyset$.
     - **[Cas 2]** si $x\geqslant 1$: on peut passer au carrée dans l'égalité tout en conservant l'équivalence, les deux membres étant positifs. On obtient comme résultat $x=0$ ou $x=3$. Or, on est sous l'hypothèse $x\geqslant 1$ donc $\mathscr{S}_{[1,\infty[}=\{3\}$.

   On a : $\mathscr{S}=\mathscr{S}_{]-\infty,1[}\cup\mathscr{S}_{[1,\infty[}$, soit $\boxed{\mathscr{S}=\{3\}}$.
2. - Domaine de définition : $\mathscr{D}=[-2,+\infty[$.
   - Les deux termes étant positifs, on peut passer au carré dans l'inégalité tout

en conservant l'équivalence et on obtient
$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}\leqslant 1 \iff \sqrt{(x+4)(x+2)}\leqslant -\frac{5}{2}-x.$$
Il faut ensuite faire deux cas :

◇ **[Cas 1]** si $x>-\frac{5}{2}$: on ne peut pas élever au carré.
Comme une racine est toujours supérieure ou égale à 0, on a pas de solution dans ce cas.

◇ **[Cas 2]** si $x\leqslant -\frac{5}{2}$: impossible car $\mathscr{D}=[-2,+\infty[$ donc pas de solution non plus dans ce cas.

Synthèse : on a $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.

3. • Domaine de définition : $\mathscr{D}=\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right[$.

• ◇ **[Cas 1]** Si $x\leqslant\frac{9}{5}$, on ne peut pas élever au carré. Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, et le membre de droite étant négatif, on obtient $\mathscr{S}_{\left]-\infty,\frac{9}{5}\right]}=\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left[\sqrt{3},\frac{9}{5}\right]$.

◇ **[Cas 2]** si $x>\frac{9}{5}$. Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient
$$\sqrt{x^2-3}>5x-9 \iff 4x^2-15x+14<0.$$
Les racines sont alors $\frac{7}{4}$ et 2. L'ensemble solution est alors pour ce cas, en n'oubliant pas de regarder à la fois le domaine de définition et l'hypothèse $x>\frac{9}{5}$, $\mathscr{S}_2=\left]\frac{9}{5},2\right[$.

Synthèse : $\boxed{\mathscr{S}=\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\right[}$.

4. • Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si $(x+3)(x-1)\geqslant 0$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont -3 et 1. Ainsi : $\mathscr{D}=]-\infty,-3]\cup[1,+\infty[$.

• On étudie deux cas :

◇ **[Cas 1]** Si $2x-1<0 \iff x<\frac{1}{2}$, on ne peut pas élever au carré. On se place donc sur $]-\infty,-3]$. Comme une racine carrée est un nombre positif ou nul, elle est bien toujours supérieure ou égale à un nombre strictement négatif. Ainsi l'inégalité est toujours vérifiée sur cet ensemble et on obtient que $\mathscr{S}_{\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[}=[-\infty,-3]$.

◇ **[Cas 2]** Si $2x-1\geqslant 0 \iff x\geqslant\frac{1}{2}$.
On se place donc sur $[1,+\infty[$. Les deux termes sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :
$$\sqrt{(x+3)(x-1)}\geqslant 2x-1 \iff x^2+2x-3\geqslant 4x^2-4x+1$$
$$\iff 3x^2-6x+4\leqslant 0.$$
Le discriminant vaut $\Delta=-12$ et ainsi pour tout x, on a : $3x^2-6x+4>0$. Donc $\mathscr{S}_{\left[\frac{1}{2},+\infty\right[}=\emptyset$.

Synthèse : on a $\boxed{\mathscr{S}=[-\infty,-3]}$.

5. • Domaine de définition $\mathscr{D}=[-2,+\infty[$.

• Comme d'habitude, on cherche à élever au carré, mais le signe du membre de gauche est non évident. On peut utiliser en revanche la forme conjuguée, c'est-à-dire on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité strictement positive $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}$. On obtient alors l'équation équivalente à résoudre :
$$\frac{2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}=1 \iff 2=\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}.$$
On est ainsi ramené à pratiquement la même équation que tout à l'heure que je vous laisse résoudre. On obtient $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{7}{4}\right\}}$.

Solution (exercice 7) [Énoncé] *Lorsque l'on envisage différents cas, on notera en abrégé $\mathscr{S}_1,\mathscr{S}_2,\ldots$ les ensembles de solutions trouvées dans ces sous-cas.*

1. Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :

• **[Cas 1]** si $x\geqslant 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
$$x^2=x \iff x^2-x=0 \iff x(x-1)=0.$$
L'ensemble des solutions est alors $\mathscr{S}_1=\{0,1\}$.

• **[Cas 2]** si $x\leqslant 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
$$x^2=-x \iff x^2+x=0 \iff x(x+1)=0.$$
L'ensemble des solutions est alors $\mathscr{S}_2=\{-1,0\}$.

Synthèse : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{-1,0,1\}}$.

2. On fait deux cas selon que $2x-3\geqslant 0$ ou $2x-3<0$ et on obtient $\boxed{\mathscr{S}=\left[\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right]}$.

3. Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :

• **[Cas 1]** si $2+x\geqslant 0$, à savoir si $x\geqslant -2$. L'équation à résoudre est alors :
$$2+x+2+2x=x^2 \iff x^2-3x-4=0$$
Le discriminant d'une telle équation est $\Delta=25$, ainsi, les solutions sont $x_1=-1$ et $x_2=4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2, donc $\mathscr{S}_1=\{-1,4\}$.

• **[Cas 2]** si $2+x\leqslant 0$, à savoir si $x\leqslant -2$. L'équation à résoudre est alors :
$$-2-x+2+2x=x^2 \iff x^2-x=0$$

Les solutions sont $x_1 = 0$ et $x_2 = -1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $[-\infty, -2]$, ainsi $\mathscr{S}_2 = \emptyset$.

Synthèse : on obtient $\boxed{\mathscr{S} = \{-1, 4\}}$.

4. On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\lvert 2x+3\rvert$		$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$	
$\lvert -5x+6\rvert$		$-5x+6$		$-5x+6$	0	$5x-6$	
$\lvert 2x+3\rvert - \lvert -5x+6\rvert$		$3x-9$		$7x-3$		$-3x+9$	

On étudie alors les trois cas et on obtient au final $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. On démontre l'inégalité en deux temps.

- Montrons d'abord que pour tout $x > 0$: $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

  On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geqslant 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante. Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$, à savoir $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
- On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{e}^x - x.$$

Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

De plus, $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$. Donc la fonction f est toujours positive ou nulle d'après le tableau de variations, on a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant \frac{x^2}{2} + 1.}$$

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. Soit $x \in]0, 1[$. Alors $x < 1 \implies x^2 < x$ en multipliant de chaque côté par x. De plus, en divisant par $\sqrt{x} > 0$ de chaque côté on a :

$$x < \sqrt{x} \iff \sqrt{x} < 1.$$

Mais $x < 1 \implies \sqrt{x} < \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de la racine. Ainsi, on a bien montré :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad x^2 < x < \sqrt{x}.}$$

2. D'après la question précédente, on a $x^2 < \sqrt{x}$ et $x < \sqrt{x}$ et en additionnant les inégalités, on obtient l'inégalité cherchée. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad x^2 + x < 2\sqrt{x}.}$$

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. Soient a et b deux réels. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}(|a| - |b|)^2 &= |a|^2 - 2|a|\,|b| + |b|^2 && \text{car } |a|^2 = a^2 \ |b|^2 = b^2\\ &= a^2 - 2|a|\,|b| + b^2 && \text{car } |a|\,|b| = |ab|\\ &= a^2 - 2|ab| + b^2.\end{aligned}$$

D'autre part, on a $(|a| - |b|)^2 \geqslant 0$ (un carré étant positif).

On obtient : $a^2 - 2|ab| + b^2 \geqslant 0$, ce qui donne : $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$, d'où le résultat en divisant par 2 (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité). Donc :

$$\boxed{|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)}.$$

2. Soit $x \geqslant 0$. Il suffit d'utiliser la question précédente avec $a = \sqrt{x}$ et $b = 1$, ce

qui donne :
$$\left|\sqrt{x}\right| \leqslant \frac{\sqrt{x}^2+1}{2}$$
puis : $\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$, sachant que $\left|\sqrt{x}\right| \geqslant 0$ (puisque $\sqrt{x} \geqslant 0$) et $\sqrt{x}^2 = x$ par définition. Donc : $\boxed{\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}}$.

Solution (exercice 11) [Énoncé]

1.
- Domaine de résolution : $\mathbb{R}$.
- On résout par équivalences successives, l'inconnue étant ici x. On obtient ainsi que :
$$m(x+2) = 2m(3x-4) \iff -5mx = -10m \iff mx = 2m.$$
On doit donc ici étudier deux cas selon que m est nul ou pas car on ne peut pas diviser une égalité par un nombre nul...
  - ◇ **[Cas 1]** si $m = 0$: l'équation est alors équivalente à : $0 = 0$. Tout est solution dans ce cas.
  - ◇ **[Cas 2]** si $m \neq 0$: l'équation est alors équivalente à : $x = 2$.

En conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } m = 0 \\ \{2\} & \text{si } m \neq 0. \end{cases}}$

2. Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a :
$$(m+1)x + 2 - m = 0 \iff (m+1)x = m-2.$$
- Si $m = -1$, l'équation devient $0 = -1-2 = -3$.
- Si $m \neq -1$, on peut alors diviser par $m+1 \neq 0$.

En conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m = -1 \\ \left\{\frac{m-2}{m+1}\right\} & \text{si } m \neq -1. \end{cases}}$

3. Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a
$$e^{2x} - 2me^x + 1 = 0 \iff X = e^x \text{ solution de } X^2 - 2mX + 1 = 0.$$
Étude de l'équation $X^2 - 2mX + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4(m^2-1)$. On fait des Cas selon le signe de Δ.
- Si $m \in]-1,1[$, alors $\Delta < 0$, et $\boxed{\mathscr{S}_{m\in]-1,1[} = \emptyset}$.
- Si $m \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, alors $\Delta \geqslant 0$. Il existe donc deux solutions réelles (distinctes si $m \neq -1$ et $m \neq 1$ et égale sinon) qui sont :
$$X_1 = m + \sqrt{m^2-1} \text{ et } X_2 = m - \sqrt{m^2-1}.$$
Comme $X = e^x$, on doit vérifier si X_1 et X_2 sont bien strictement positives.
  - ◇ Étude de X_1 :
$$X_1 > 0 \iff \sqrt{m^2-1} > -m.$$
    - – Si $m \in [-\infty,-1]$, alors $-m \geqslant 0$ et on peut passer au carré de chaque côté tout en conservant l'équivalence. Ainsi,
$$\sqrt{m^2-1} > -m \iff m^2-1 > m^2 \iff -1 > 0.$$
    Impossible donc X_1 ne peut pas être solution si $m \in [-\infty,-1]$.
    - – Si $m \in [1,+\infty[$, alors $-m < 0$ et l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, X_1 est solution si $m \in [1,+\infty[$.
  - ◇ étude de X_2. On refait un raisonnement analogue et on obtient que si $m \in]-\infty,-1]$, X_2 ne peut pas être solution et que si $m \in]1,+\infty]$, X_2 est solution.

On peut donc conclure dans le Cas où $m \in [-\infty,-1]$, on a — $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[-\infty,-1]} = \emptyset}$.

Il nous reste ainsi à finir le Cas où $m \in [1,+\infty[$. Dans ce cas, on a vu que X_1 et X_2 sont strictement positifs. On obtient alors en utilisant le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$—
$$\begin{aligned} e^{2x} - 2me^x + 1 = 0 &\iff e^x = m + \sqrt{m^2-1} \ \underline{\textbf{ou}}\ e^x = m - \sqrt{m^2+1} \\ &\iff x = \ln\left(m + \sqrt{m^2-1}\right) \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \ln\left(m - \sqrt{m^2+1}\right). \end{aligned}$$
Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[1,+\infty[} = \left\{\ln\left(m+\sqrt{m^2-1}\right), \ln\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)\right\}}$.

Solution (exercice 12) [Énoncé]

1. Ici le domaine de résolution est $\mathbb{R}$. On peut remarquer que le coefficient constant du trinôme vaut $m \times 1$, le coefficient du x vaut $-(m+1)$, et le coefficient dominant vaut 1. Les racines sont donc m et 1. Si l'on ne pense pas à utiliser cette propriété, on calcule le discriminant et on obtient que $\Delta = (m-1)^2$. On étudie donc 2 cas :
- **[Cas 1]** si $m = 1$: Alors $\Delta = 0$ et $x = 1$ est la seule solution et $x^2 - (m+1)x + m \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{S}_{m=1} = \mathbb{R}.}$
- **[Cas 2]** si $m \neq 1$, alors $\Delta > 0$ et les deux solutions réelles distinctes sont $x_1 = \frac{m+1+|m-1|}{2}$ et $x_2 = \frac{m+1-|m-1|}{2}$. On doit donc distinguer deux cas :
  - ◇ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient $\boxed{\mathscr{S}_{m<1} =]-\infty,m] \cup [1,+\infty[.}$
  - ◇ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient $\boxed{\mathscr{S}_{m>1} =]-\infty,1] \cup [m,+\infty[.}$

2. L'inéquation est définie si $x-1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$. Ainsi, $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$. Sur cet ensemble, on obtient :
$$\frac{m}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+2} \iff \frac{m(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{x(m-1)+2m+1}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0.$$

- Si $m=1$, l'inéquation à résoudre devient alors :
$$\frac{m}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+2} \iff \frac{3}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0.$$
Un tableau de signe donne alors : $\boxed{\mathscr{S}_{m=1} =]-2,1[}$.

- Si $m \neq 1$, alors la racine de $x(m-1)+2m+1$ est $\dfrac{2m+1}{1-m}$. Pour pouvoir faire un tableau de signe correct, on doit savoir où elle se situe par rapport à -2 et 1.
  - ◇ Si $m>1$. La résolution de $\dfrac{2m+1}{1-m} \leqslant -2$ est justement équivalente à $m>1$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est la plus petite des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m>1 \iff m-1>0$:

x	$-\infty$		$\frac{2m+1}{1-m}$		-2		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m>1} = \left]-\infty, \dfrac{2m+1}{1-m}\right] \cup]-2,1]}$.

  - ◇ Si $0 \leqslant m < 1$. La résolution de $\dfrac{2m+1}{1-m} \geqslant 1$ est équivalente à $0 \leqslant m < 1$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est la plus grande des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m<1 \iff m-1<0$:

x	$-\infty$		-2		1		$\frac{2m+1}{1-m}$		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[0,1[} =]-2,1[\cup \left[\dfrac{2m+1}{1-m}, +\infty\right[}$.

  - ◇ Si $m<0$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est entre les racines -2 et 1. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m<0<1 \iff m-1<0$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{2m+1}{1-m}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m<0} = \left]-2, \dfrac{2m+1}{1-m}\right] \cup [1,+\infty[}$.

3.
- Domaine de résolution. L'inéquation a un sens si : $2x+m \geqslant 0 \iff x \geqslant -\dfrac{m}{2}$.
Ainsi, $\mathscr{D} = \left[-\dfrac{m}{2}, +\infty\right[$.
- Résolution :
  - ◇ **[Cas 1]** $x+1<0 \iff x<-1$:
  L'inéquation est alors toujours vérifiée car une racine carrée est toujours positive.
  Pour trouver l'ensemble solution, il faut alors étudier la position de $-\dfrac{m}{2}$ par rapport à -1.
  $$-\frac{m}{2} \leqslant -1 \iff -m \leqslant -2 \iff m \geqslant 2.$$
  Ainsi, on obtient
    - Si $m \geqslant 2$, alors $\mathscr{S}_{1,m\geqslant 2} = \left[-\dfrac{m}{2}, -1\right[$.
    - Si $m<2$, alors $\mathscr{S}_{1,m<2} = \emptyset$.
  - ◇ **[Cas 2]** $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$. Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs, on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence et on obtient :
  $$\sqrt{2x+m} \geqslant x+1 \iff 2x+m \geqslant x^2+2x+1 \iff x^2+1-m \leqslant 0.$$
  Le discriminant est $\Delta = 4(m-1)$, on a donc
    - Si $m<1$, alors $\Delta<0$ et $\mathscr{S}_{2,m<1} = \emptyset$.
    - Si $m \geqslant 1$, alors les deux solutions sont $-\sqrt{m-1}$ et $\sqrt{m-1}$. Il faut alors étudier la position de $-\sqrt{m-1}$ par rapport à $-\dfrac{m}{2}$ et à -1. On

a

$$\begin{aligned} -\sqrt{m-1} &\geqslant -\frac{m}{2} \\ \iff \sqrt{m-1} &\geqslant \frac{m}{2} \\ \iff m^2-4m+4 &\geqslant 0 \\ \iff (m-2)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

termes positifs

Cette dernière inégalité est toujours vraie. Ainsi, on a, pour $m \geqslant 1$, $-\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2}$.

Un raisonnement analogue montre que

$$-\sqrt{m-1} \leqslant -1 \iff m \geqslant 2.$$

On en déduit les résultats suivants :

- Si $1 \leqslant m < 2$, alors $-\sqrt{m-1} > -1$, $-\frac{m}{2} > -1$ et $-\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2}$, donc $\mathscr{S}_{2,m\in[1,2[} = [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$.
- Si $m \geqslant 2$, alors $-\sqrt{m-1} \leqslant -1$, $-\frac{m}{2} \leqslant -1$ et $-\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2}$, donc $\mathscr{S}_{2,m\geq 2} = [-1, \sqrt{m-1}]$.

◇ On peut alors conclure :

- Si $m < 1$, alors $\boxed{\mathscr{S}_{m<1} = \emptyset.}$
- Si $1 \leqslant m < 2$, alors $\mathscr{S}_{m\in[1,2[} = \emptyset \cup \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right]$, soit $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[1,2[} = \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right]}$.
- Si $m \geqslant 2$, alors $\mathscr{S}_{m\geq 2} = \left[-\frac{m}{2}, -1\right[\cup \left[-1, \sqrt{m-1}\right[$ soit $\boxed{\mathscr{S}_{m\geq 2} = \left[-\frac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right[}$.

Solution (exercice 13) [Énoncé]

1. $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$ si et seulement si $2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3$ par définition de la partie entière. Puisque les trois membres sont positifs, on a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3 &\iff 4 \leqslant x^2+1 < 9 \\ &\iff 3 \leqslant x^2 < 8, \\ &\iff x \in \left]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[}$.

Solution (exercice 14) [Énoncé] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

$$\begin{aligned} 2^p \leqslant n < 2^{p+1} &\iff \mathrm{e}^{p\ln 2} \leqslant n < \mathrm{e}^{(p+1)\ln 2} \\ &\iff p\ln(2) \leqslant \ln(n) < (p+1)\ln 2 \\ &\iff p \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln 2} < p+1 \\ &\iff \boxed{p = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln 2} \right\rfloor = \lfloor \log_2(n) \rfloor}. \end{aligned}$$

Solution (exercice 15) [Énoncé] Partons la encore de la définition.

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc en multipliant par n,

$$n\lfloor x \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

Puisque $n\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à nx, on a $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$. Puisque $n\lfloor x \rfloor + n$ est un entier strictement supérieur à nx, on a $\lfloor nx \rfloor + 1 \leqslant n\lfloor x \rfloor + n$, donc finalement :

$$n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant n\lfloor x \rfloor + n - 1.$$

Divisons à présent par n de chaque côté :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Par unicité de la partie entière, on a donc immédiatement :

$$\boxed{\left\lfloor \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

Solution (exercice 16) [Énoncé] Pour établir des inégalités sur les parties entières, on utilise en général la définition du cours ci-après : c'est le plus grand entier inférieur ou égal au réel en question. Par ailleurs, la partie entière plus un est le plus petit entier strictement supérieur au réel en question.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de la partie entière, nous avons :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Nous avons donc en sommant :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2. \quad (\star)$$

- Montrons que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$. Pour établir cette majoration, il suffit donc d'établir que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $x+y$ (on aura alors que la partie entière de $x+y$ est supérieure à cette entier, puisque c'est le plus grand). Le réel $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est bien entier, puisque c'est une somme de deux entiers, et on a montré avec $(\star)$ que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y$, c'est donc terminé.
- Montrons que $\lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. D'après $(\star)$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ est un entier strictement supérieur à $x+y$, $\lfloor x+y \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $x+y$, donc

  $$\lfloor x+y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

  Donc $\lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

On a donc établi que :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor \leqslant \lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1}.$$

On retiendra donc en particulier de cet exercice que la partie entière d'une somme **n'est pas** la somme des parties entières.

Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. $\boxed{\forall x\in A,\ x\leqslant -7.}$

2. $\boxed{\exists x\in A,\ x<2.}$

3. $\boxed{\exists m\in\mathbb{R},\ \exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A,\ m\leqslant x\leqslant M.}$

4. $\boxed{\forall x\in A,\ x\geqslant \sqrt{\pi}.}$

5. $\boxed{\forall M\in\mathbb{R},\ \exists x\in A,\ x>M.}$

6. $\boxed{\begin{cases} \forall x\in A, & x\leqslant 1\\ \forall M<1,\ \exists x\in A, & x>M.\end{cases}}$ La seconde ligne signifiant que aucun $M<1$ ne majore A.