Chapitre (ALG) 3 Trigonométrie

Résumé & Plan

Ce chapitre consiste à revoir les éléments de trigonométrie des années antérieures, et à les compléter.

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

— Galilée

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. GÉNÉRALITÉS

On rappelle dans cette section la définition géométrique du cosinus, sinus et de la tangente. Leur étude en tant que fonction sera faite dans le Chapitre (AN) 1.

1.1. Définitions

Définition 1 | Cercle trigonométrique

- Le *cercle trigonométrique* est le cercle du plan de rayon 1 et de centre O.
- Plus précisément, il s'agit de :
$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}.$$

Définition 2 | Cosinus, sinus et tangente

Soit $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. Soit x un réel et $\mathrm{M}(x)$ le point de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

- On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point $\mathrm{M}(x)$.
- On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point $\mathrm{M}(x)$.
- $\boxed{\text{Lorsque } x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}}$, on appelle *tangente de* x, notée $\tan x$, la quantité : $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

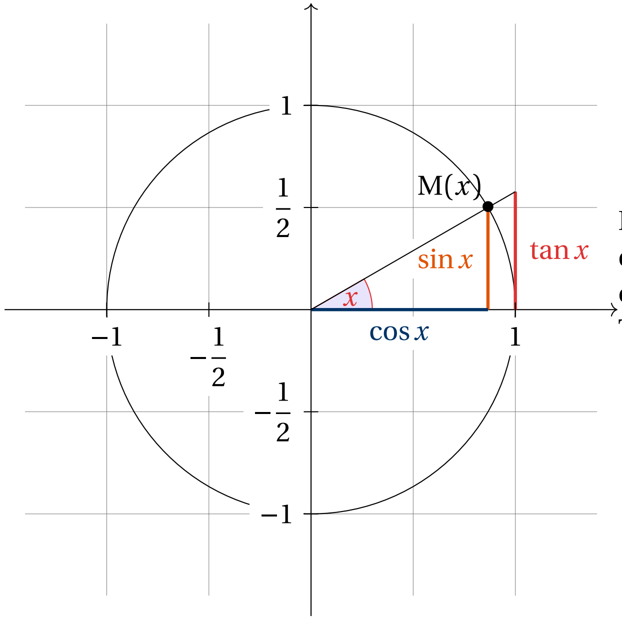
  Dans la suite, on notera $\mathscr{D}_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. *(cela correspondra au « domaine de définition de la fonction* tan *», que nous étudierons dans un futur chapitre)*

Remarque 1 Pour la tangente, la condition $x\notin\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ garantit que $\cos x$ ne s'annule pas, donc que la fraction est bien définie. Nous le reconstaterons lors de la résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 1 | Conséquences directes de la définition

- **[Théorème de Pythagore]** $\forall x\in\mathbb{R},\quad \underbrace{\cos^2 x}_{=(\cos x)^2}+\underbrace{\sin^2 x}_{=(\sin x)^2}=1.$
- **[Inégalités fondamentales]**
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}-1\leqslant\cos x\leqslant 1\\ -1\leqslant\sin x\leqslant 1\end{cases}\iff\begin{cases}|\cos(x)|\leqslant 1,\\ |\sin(x)|\leqslant 1.\end{cases}$$

Lycée Michel MONTAIGNE – Bordeaux



Pourquoi indiquer $\tan x$ à cet endroit ? Ceci est une simple conséquence du théorème de THALÈS. En effet, il donne
$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE ET DÉFINITION DE $\cos, \sin, \tan$

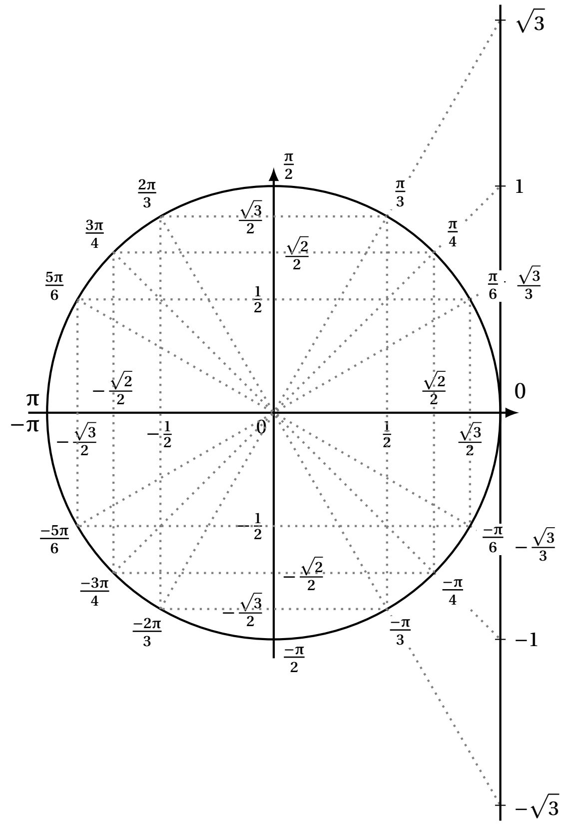
- **[Périodicité]** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$,
$$\cos(x+2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2k\pi) = \sin x, \quad \tan(x+k\pi) = \tan x.$$

Preuve
- Conséquence immédiate du théorème de Pythagore.
- 🖋
- Conséquence immédiate de l'égalité $M(x+2k\pi) = M(x)$, en considérant abscisse et ordonnée.

Remarque 2 **(Et le collège ?)** Ces définitions sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été vues au collège et au lycée. Dans votre enfance, on vous avait expliqué qu'en considérant un angle x d'un triangle rectangle, on avait :
$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$
Ici, le triangle rectangle sous-jacent est celui dessiné sur le cercle trigonométrique précédent, avec la longueur de l'hypoténuse qui vaut 1 (la distance OM(x)). Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de THALÈS. Il en est de même pour le sinus.

1.2. Valeurs remarquables

On rappelle également ici un certain nombre de valeurs remarquables utiles sans démonstration.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Pour la tangente, à savoir retrouver rapidement plutôt que de les apprendre :					
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 2 | Multiples de π

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors : $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$.

Preuve

-

-

2. FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

Il existe de nombreuses formules en trigonométrie, seules quelques unes sont à notre programme, ce sont celles figurant dans les énoncés ci-après. Toutes les autres sont hors-programme, certaines d'entre elles seront vues néanmoins dans des exemples.

2.1. Formules d'addition & Angles associés

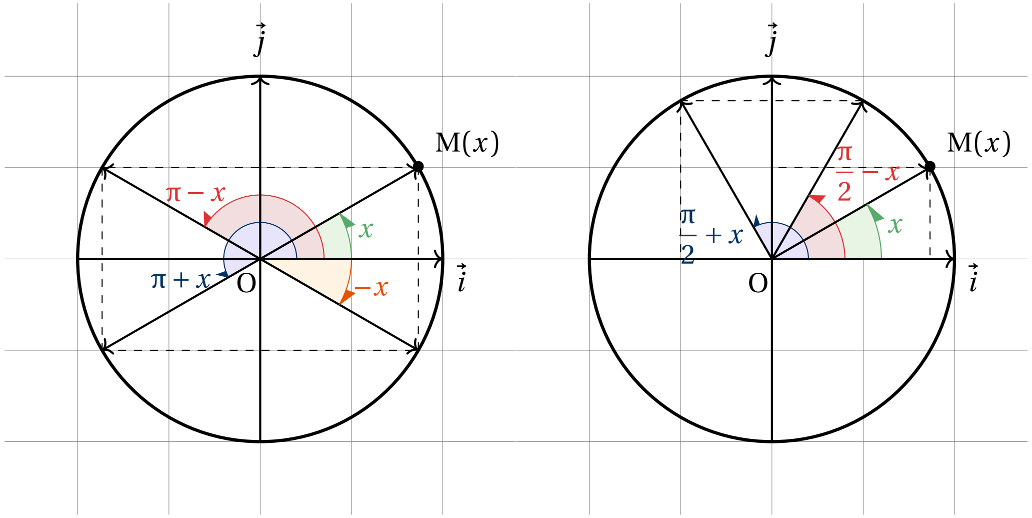
On commence par les plus importantes : les formules d'addition, qui seront admises (voir vos cours de lycée sur le produit scalaire pour une démonstration).

Proposition 3 | Formules d'addition

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$.

Remarque 3 (Comment retenir ?)
- Pour le cosinus, le signe est inversé dans le résultat. «$\pm \to \mp$», et on ne mélange pas les fonctions.
- Pour le sinus, le signe est préservé, et on mélange les fonctions.

Pour les formules d'angles associés qui vont suivre, commençons par un dessin préliminaire.



En prenant différentes valeurs de x, y dans les formules d'addition et en utilisant les valeurs remarquables, ou en s'appuyant sur les dessins précédents, on déduit les formules ci-après.

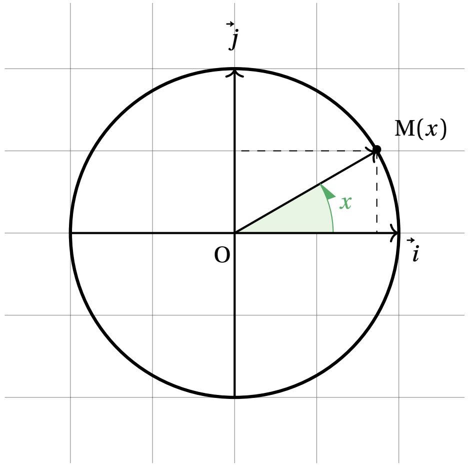
Corollaire 1 | Formules de transformation d'angles associés

Soit $x \in \mathbb{R}$.
- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Preuve Intéressons-nous par exemple aux formules ci-après.

(1) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, **(2)** $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, **(3)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$.

- **[Méthode 1 : cercle trigonométrique]** Démontrons **(1)**, **(2)** et **(3)** en revenant à la définition à l'aide du cercle trigonométrique.



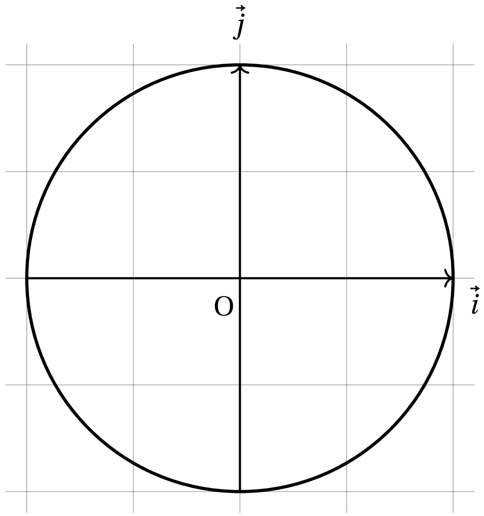
- ❤ **[Méthode 2 : formules d'addition]** Démontrons **(1)** et **(2)** à l'aide des formules d'addition. *(méthode à éviter en pratique, privilégiez la première bien plus rapide en cas d'oubli...)*

Exemple 1 À l'aide des valeurs remarquables et de propriétés sur cos, sin, déterminer les valeurs ci-après.

- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Remarque 4

- Les égalités précédentes peuvent aussi se lire directement sur le cercle trigonométrique.



- Naturellement, des formules similaires peuvent s'obtenir pour la tangente. Mais on les retrouve facilement à l'aide de celles énoncées précédemment.

- Ne pas apprendre l'énoncé précédent par coeur : utiliser en priorité la méthode 1 de la preuve précédente.

2.2. Formules de duplication/anti-linéarisation & Linéarisation

Les cas particuliers $x = y$ dans les formules d'addition fournissent les formules dites « de duplication ».

Corollaire 2 | Formules de duplication / anti-linéarisation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$.
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

Preuve

Ou encore, de manière équivalente, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3 | Formules de linéarisation

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Remarque 5

- On parle de « linéarisation » car, par exemple pour la première, on transforme le produit $\cos(x)\boxed{\times}\cos(x)$ en somme : $\dfrac{\cos(2x)\boxed{+}1}{2}$.
- Ce type de formule sera très utile tout au long de l'année ; calcul d'intégrales ou sommes faisant intervenir des puissances de fonctions trigonométriques par exemple.

Preuve

Exemple 2 À l'aide des valeurs remarquables et de propriétés sur cos, sin, déterminer les valeurs ci-après.

- $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$
- $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

Exemple 3 Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\dfrac{\pi}{8}$.

COMPLÉMENTS. Voici quelques formules additionnelles : elles ont le statut d'exemple car leur énoncé n'est pas à connaitre, mais c'est classique dans les sujets de devoir les retrouver.

Exemple 4 (Autres formules de linéarisation) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide des formules d'addition, établir des formules de linéarisation pour :

- $\cos(x)\cos(y) =$
- $\sin(x)\sin(y) =$
- $\sin(x)\cos(y) =$

Note | *Lorsque $x = y$, les deux premières formules donnent les formules de linéarisation du programme.*

Indication : Remarquons que $\cos(x)\cos(y)$ *apparait dans les formules de* $\cos(x+y)$ *et* $\cos(x-y)$.

Exemple 5 (Autres formules d'anti-linéarisation) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide des formules d'addition, établir des formules d'anti-linéarisation pour :

- $\cos(x) + \cos(y) =$
- $\cos(x) - \cos(y) =$
- $\sin(x) + \sin(y) =$
- $\sin(x) - \sin(y) =$

Indication : Remarquons que $\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2} = x$ *et* $\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2} = y$

2.3. Transformation de FRESNEL

Une dernière conséquence des formules d'addition est la transformation d'expressions trigonométriques de la forme $a\cos x + b\sin x$ en $\rho\cos(x-\varphi)$. Pourquoi vouloir faire cela ? Cela a un intérêt en physique, et pour nous un intérêt dans les résolutions d'équations trigonométriques (voir la fin du chapitre). Commençons par énoncer la méthode générale.

Méthode 1 (Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée ») Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$. On souhaite transformer l'expression :

$$\mathrm{E}(x) = a\cos x + b\sin x \qquad \text{en} \qquad \rho\cos(x-\varphi) \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}.$$

On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. ♥ $\boxed{\text{Mettre } \rho = \sqrt{a^2+b^2} \text{ en facteur}}$ ($\neq 0$ par hypothèse), de sorte que :
$$\mathrm{E}(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$
2. Le point $\left(\frac{a}{\rho};\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2+\left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = 1$. Ainsi :
$$\exists\varphi \in [0,2\pi[,\quad \frac{a}{\rho} = \cos\varphi,\quad \frac{b}{\rho} = \sin\varphi.$$
3. Alors : $\quad \mathrm{E}(x) = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \cos(x-\varphi)$ d'après la seconde formule d'addition du cosinus.

La méthode s'adapte sans trop de difficultés si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x\pm\varphi)$, ou encore $\rho\cos(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Remarque 6 L'angle φ peut ne pas être explicite en fonction des valeurs de a, b. Dans les exercices, en pratique, il le sera toujours (valeurs remarquables).

Exemple 6

- Écrire sous forme d'un cosinus l'expression $\sqrt{2}\cos x + \sqrt{6}\sin x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- Même question mais avec un sinus.

- Écrire sous forme d'un cosinus puis d'un cosinus l'expression $\cos x - \sin x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

2.4. Formulaire de trigonométrie

Dans les tableaux ci-dessous, x, y désignent des réels.

Formules d'addition	$\cos(x\pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
	$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$
Formules de duplication (anti-linéarisation)	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1-2\sin^2(x) = 2\cos^2(x)-1$
	$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
Formules de linéarisation	$\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
	$\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

3. ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Notation **Modulo**

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- Soit de plus $a \in \mathbb{R}$. Alors on note $x = y \quad [a]$ lorsque :
$$\exists k \in \mathbb{Z},\quad x = y + ka.$$
Se lit : « x et y sont égaux à a-près ».
- En particulier, $x = y \quad [2\pi]$ lorsque :
$$\exists k \in \mathbb{Z},\quad x = y + 2k\pi.$$

3.1. Équations trigonométriques fondamentales

Exemple 7 **(Cas des pôles du cercle trigonométrique)** En vous appuyant sur un cercle trigonométrique, résoudre les équations trigonométriques ci-après.

1. $\cos(x) = 1$
2. $\cos(x) = -1$
3. $\sin(x) = 1$
4. $\sin(x) = -1$
5. $\cos(x) = 0$
6. $\sin(x) = 0$

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque le membre de droite n'est pas ± 1 ou 0, on essaiera toujours de se ramener à une « équation trigonométrique fondamentale », *i.e.* celles du résultat ci-après, dont l'ensemble des solutions est donné par la proposition suivante.

Proposition 4 | Équations trigonométriques fondamentales

- Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\cos(x) = \cos(a) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = a + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -a + 2k\pi \\ &\iff x = a \ [2\pi] \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -a \ [2\pi].\end{aligned}$$

Autrement dit, l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{a + 2k\pi; -a + 2k\pi\}.$$

- Soit $(x, a) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin(a) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = a + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \pi - a + 2k\pi \\ &\iff x = a \ [2\pi] \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \pi - a \ [2\pi].\end{aligned}$$

Autrement dit, l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{a + 2k\pi; \pi - a + 2k\pi\}.$$

- Soit $(x, a) \in \mathscr{D}_{\tan}^2$,

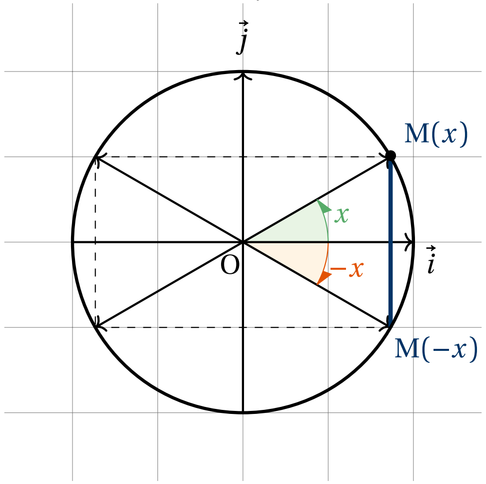
$$\begin{aligned}\tan(x) = \tan(a) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = a + k\pi \\ &\iff x = a \ [\pi].\end{aligned}$$

Autrement dit, l'équation $\tan(x) = \tan(a)$ a pour ensemble de solutions :
$$\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{a + k\pi\}.$$

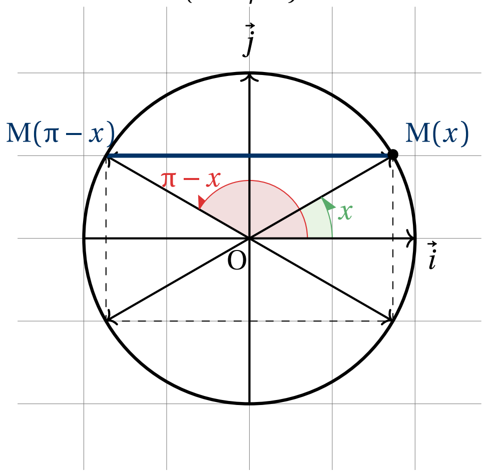
Définition 3 | Équation trigonométrique fondamentale
On appelle *équation trigonométrique fondamentale* l'une des équations de la proposition précédente.

Remarque 7 **(Retenir les solutions d'équations trigonométriques de manière géométrique)**

ANGLES AYANT LE MÊME COSINUS
(à 2π-près)



ANGLES AYANT LE MÊME SINUS
(à 2π-près)



Remarque 8

- Pour résoudre $\cos x = 1$, on peut *(mais peu efficace contrairement à un simple dessin)* utiliser le résultat précédent. En effet, $1 = \cos(0)$, donc :

$$\begin{aligned}\cos x = 1 &\iff \cos x = \cos 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2k\pi.\end{aligned}$$

On retrouve le résultat de l'Exemple 7 obtenu avec un simple dessin.

- Pour résoudre $\sin x = 0$, on peut *(mais peu efficace là aussi!)* utiliser le résultat précédent. En effet, $0 = \sin(0)$, donc :

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\iff \sin x = \sin 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = 0 + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \pi - 0 + 2k\pi = (2k+1)\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi. \end{aligned}$$

On retrouve le résultat de l'Exemple 7 obtenu avec un simple dessin.

- Le même constat vaut pour toutes les autres équations traitées dans l'Exemple 7.

Preuve

- Lecture graphique.
- Lecture graphique.
- Résolvons $\tan(x) = \tan(a)$ de manière calculatoire. *(une démonstration géométrique est aussi possible, en utilisant l'interprétation graphique de la tangente)*

Exemple 8

- Résoudre $\sin x = 2$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre $\sin x = \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis $]-2\pi, 0]$.
- Résoudre $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis $[-\pi, \pi[$.
- Résoudre $\sin x = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.
  - **[Méthode 1 : angles associés]**

◇ **[Méthode 2 : transformation de FRESNEL]**

◇ **[Vérification]** Les solutions trouvées sont dans le domaine de définition.

- Résoudre $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

◇ **[Domaine de résolution]**

◇ **[Résolution]**

3.2. Autres équations trigonométriques

À L'AIDE D'UNE TRANSFORMATION DE FRESNEL. Lorsque l'équation donnée n'est pas de la forme « fondamentale », on peut parfois s'y ramener, par exemple en utilisant une transformation de FRESNEL.

Exemple 9 Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ sur $\mathbb{R}$.

À L'AIDE D'UN CHANGEMENT DE VARIABLE TRIGONOMÉTRIQUE. Il s'agit d'une résolution classique par changement de variable où l'on peut poser $X = \cos(x)$ ou $X = \sin(x)$ ou $X = \tan(x)$.

Exemple 10 Résoudre sur $[-\pi, \pi[$ l'équation $2\sin^2(x) + 5\cos(x) = 4$.

Exemple 11

- Cherchons $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad X^3 - \sqrt{3}X^2 - X + \sqrt{3} = (X-1)(aX^2 + bX + c).$$

- Résoudre sur $[0, 2\pi[$ l'équation :
$$\tan^3(x) - \sqrt{3}\tan^2(x) - \tan(x) + \sqrt{3} = 0.$$

EN FACTORISANT, À L'AIDE DE FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES. Lorsqu'on n'est dans aucun des cas précédents, on utilise les formules trigonométriques pour obtenir une expression factorisée et se ramener à l'un ou plusieurs des cas précédents.

Exemple 12 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(x) + \sin(3x) = 0$.

- **[Méthode 1 : angles associés]**

- **[Méthode 2 : duplication]**

Méthode 2 (Résoudre une équation trigonométrique) Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour résoudre $f(x) = \alpha$:
- si $\alpha \notin [-1, 1]$, l'équation n'admet pas de solution.
- Sinon, lorsque $\alpha \in \{\pm 1, 0\}$, on conclut directement à l'aide d'un dessin.
- Sinon, on cherche à écrire α sous la forme $f(a)$ afin de résoudre une équation fondamentale.
- Si on est dans aucun des cas précédents, on peut utiliser d'autres techniques : transformation de FRESNEL, changement de variable ou des formules de trigonométrie pour factoriser f.

Pour résoudre une équation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)a$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

4. INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Il n'y pas de résultat mentionné au programme, on procède alors à la résolution avec l'aide d'un dessin.

Méthode 3 (Résoudre une inéquation trigonométrique) Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre une inéquation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)\alpha$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

Voyons plusieurs exemples.

Exemple 13 Résoudre les inéquations ci-après sur $\mathbb{R}$ puis donner les solutions sur $[0, 2\pi[$, et $[-\pi, \pi[$.

1. $2\sin x - 1 < 0$.

On se ramène à une inéquation fondamentale :

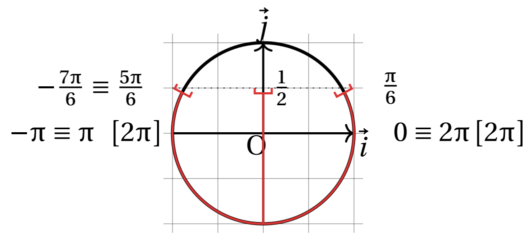
$$2\sin x - 1 < 0 \iff \sin x < \frac{1}{2}.$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[}.$$

Ainsi,

- $\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right[}$.
- $\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$.



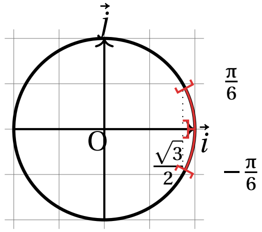
2. $2\cos(2x) > \sqrt{3}$.

On se ramène à une inéquation fondamentale :

$$2\cos(2x) > \sqrt{3} \iff \cos(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\star).$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$(\star) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi.$$



On obtient donc :

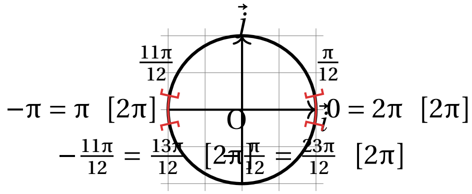
$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12}+k\pi, \frac{\pi}{12}+k\pi\right[.}$$

On peut faire un second dessin pour pouvoir en déduire les solutions sur les intervalles demandés. On a :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right]}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{11\pi}{12}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{12}, \pi\right].}$$



3. $-1 < \tan(x) < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exemple 14 Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'inéquation $2\cos^2(x)+\cos(x) > 1$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode 1 (Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée ») Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$. On souhaite transformer l'expression :

$$\mathrm{E}(x) = a\cos x + b\sin x \qquad \text{en} \qquad \rho\cos(x-\varphi) \quad \text{avec } \rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}.$$

On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. ♥ $\boxed{\text{Mettre } \rho = \sqrt{a^2+b^2} \text{ en facteur}}$ ($\neq 0$ par hypothèse), de sorte que :
$$\mathrm{E}(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$
2. Le point $\left(\frac{a}{\rho};\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2+\left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = 1$. Ainsi :
$$\exists \varphi \in [0, 2\pi[, \quad \frac{a}{\rho} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\rho} = \sin\varphi.$$
3. Alors : $\mathrm{E}(x) = \cos x\cos\varphi + \sin x\sin\varphi = \cos(x-\varphi)$ d'après la seconde formule d'addition du cosinus.

La méthode s'adapte sans trop de difficultés si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x\pm\varphi)$, ou encore $\rho\cos(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Méthode 2 (Résoudre une équation trigonométrique) Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour résoudre $f(x) = \alpha$:

- si $\alpha \notin [-1, 1]$, l'équation n'admet pas de solution.
- Sinon, lorsque $\alpha \in \{\pm 1, 0\}$, on conclut directement à l'aide d'un dessin.
- Sinon, on cherche à écrire α sous la forme $f(a)$ afin de résoudre une équation fondamentale.
- Si on est dans aucun des cas précédents, on peut utiliser d'autres techniques : transformation de Fresnel, changement de variable ou des formules de trigonométrie pour factoriser f.

Pour résoudre une équation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)a$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

Méthode 3 (Résoudre une inéquation trigonométrique) Notons $f \in \{\cos, \sin \tan\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour résoudre une inéquation du type $f(x)(\leqslant, <, \geqslant, >)\alpha$, on raisonne graphiquement sur le cercle trigonométrique.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$	$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)-1, \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$	
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$	$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$, $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler les solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(\alpha)$ en $x \in \mathbb{R}$	$x = \pm\alpha + 2k\pi$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$	*Faire un dessin de cercle trigonométrique pour le retrouver (et l'expliquer se besoin)*
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(\alpha)$ en $x \in \mathbb{R}$	$x = \alpha + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$	*Faire un dessin de cercle trigonométrique pour le retrouver (et l'expliquer se besoin)*
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler les solutions de l'équation $\tan(x) = \tan(\alpha)$ en $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x = \alpha + k\pi$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$	*Faire un dessin de cercle trigonométrique pour le retrouver (et l'expliquer se besoin)*

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. connaitre la définition géométrique de cos et sin ☐
2. connaitre les formules d'angles associés (à retrouver sur le cercle trigonométrique) ☐
3. connaitre les valeurs remarquables (à retrouver sur le cercle trigonométrique) ☐
4. connaitre les formules d'addition et leur conséquence (duplication) ☐
5. savoir résoudre des équations & inéquations trigonométriques ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

5.1. Valeurs remarquables

Exercice 1 | 👁 [Solution] Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
2. $\cos\left(\frac{27\pi}{3}\right)$
3. $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$.

Exercice 2 | **Quelques calculs de cosinus et de sinus** [Solution]

1. Sans utiliser la calculatrice, donner les valeurs suivantes :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right),\quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right),\quad \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$
Indication : Par exemple, pour le calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, *on pourra commencer par remarquer que* $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$
2. En utilisant cette fois une formule de duplication, calculer :
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Exercice 3 | 💣 **Calcul de** $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ **et de** $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ [Solution] Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On suppose que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis.

1. Rappeler les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. En déduire une expression de $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, puis une expression de
3. **[Application : calcul de** $\tan(\pi/8)$**]**
   3.1) Montrer que le nombre $x=\tan(\pi/8)$ est solution de l'équation :
   $$x^2+2x-1=0.$$
   3.2) En déduire que $x=\sqrt{2}-1$.
   3.3) Déterminer avec la même méthode la valeur de $\tan(\pi/12)$.

5.2. Équations & Inéquations

Exercice 4 | 👁 [Solution] Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(4x)=-\frac{1}{2}$
3. $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=-1$
4. $\tan(2x)=-\sqrt{3}$.

Exercice 5 | 👁 [Solution] Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=0$,
2. $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{2}=0$,
3. $3\tan^2(x)-4\sqrt{3}\tan(x)+3=0$,
4. $2\cos^3(x)-\sin^2(x)-2\cos(x)=0$.

Exercice 6 | 💣 **Angle moitié** [Solution]

1. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$. On pose : $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :
$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \tan x=\frac{2u}{1-u^2}.$$
2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :
$$\cos x-3\sin x+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-1=0.$$

Exercice 7 | 👁 [Solution] Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0,2\pi[$ et $[-\pi,\pi[$:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x)>1$
2. $\sin(3x)\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\sqrt{2}\cos(3x)\leqslant 1$
4. $\tan(x)\leqslant 1$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{-\sqrt{33}}{2}}$.
2. $\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
3. $\cos\left(\frac{27\pi}{3}\right) = \cos(9\pi) = \cos(8\pi+\pi) = \cos(\pi) = \boxed{-1}$.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. • On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, donc :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.
   • De-même, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.
   • À partir du calcul précédent, on a :
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}}.$$
2. Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2}$. On pose alors $\theta = \frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Ainsi,
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$
Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}}$.
Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On obtient ainsi,
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$
Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :
$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}.$$

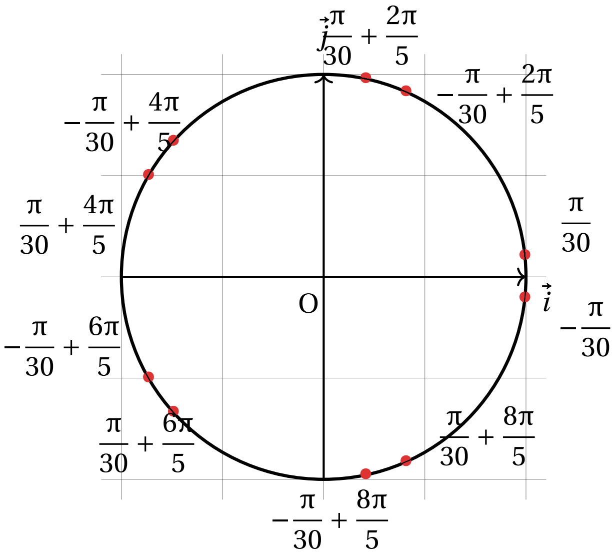
Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. On a : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b. \end{cases}$
2. Ainsi :
$$\tan(a+b) = \frac{\cos a \sin b + \sin a \cos b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos b\left(\frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\sin a}{\cos a}\right)}{\cos a \cos b\left(1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\right)} = \boxed{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}.$$
3. **3.1)** En notant $x = \tan(\pi/8)$, la formule donne pour $a = b = \pi/8$:
$$1 = \tan(\pi/4) = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2x}{1-x^2}$$
ce qui équivaut après simplification à $\boxed{x^2 + 2x - 1 = 0}$.
   3.2) On résout l'équation polynomiale de degré 2. On trouve :
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$
Mais puisqu'on sait que $x \geqslant 0$ on a $\boxed{x = \sqrt{2} - 1}$.
   3.3) De même si on pose $y = \tan(\pi/12)$ on a
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pi/6) = \frac{2y}{1-y^2}$$
d'où $y^2 + 2\sqrt{3}y - 1 = 0$. Ainsi $y = -\sqrt{3} \pm 2$. Mais puisqu'on sait que $y \geqslant 0$ on a $\boxed{y = 2 - \sqrt{3}}$.

Solution (exercice 4) [Énoncé] Il s'agit dans cet exercice d'égalités trigonométriques fondamentales que l'on résout donc en appliquant la méthode du cours.

1. L'égalité est de type équation fondamentale.
$$\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

On obtient donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}.$

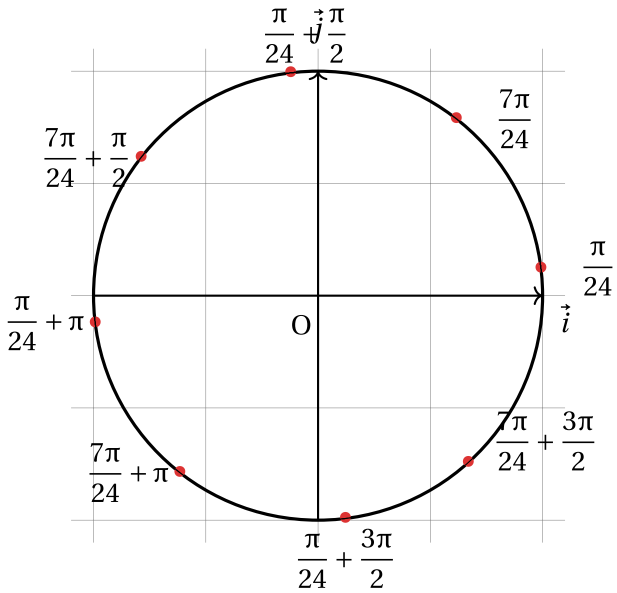


Pour savoir combien de points tracer sur le cercle pour chaque ensemble de solutions, on cherche la première valeur de k pour laquelle on retombe sur la solution de départ modulo 2π. Par exemple, pour le premier ensemble de solution, on cherche k tel que $\frac{2k\pi}{5} = 2\pi$, soit $k = 5$: on doit donc tracer 5 points sur le cercle trigonométrique. Même chose pour le deuxième ensemble de solutions.

2. L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\sin(4x) = -\frac{1}{2} \iff \sin(4x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}.$



On remarque ici qu'il faut tracer 4 points pour chaque ensemble de solutions : en effet, on doit chercher k tel que $\frac{k\pi}{2} = 2\pi$, soit $k = 4$.

3. L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

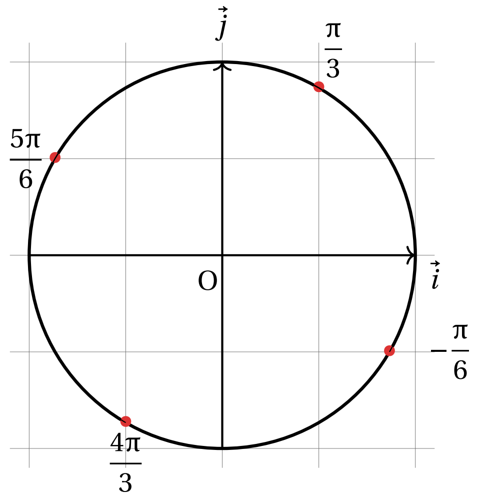
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}.$

4. L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\tan(2x) = -\sqrt{3} \iff \tan(2x) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}}$.



Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. À l'aide d'une transformation de Fresnel, on a :
$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$
On écrit alors :
$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 0$$
$$\iff \cancel{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi.$$
Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}}$.

2. À l'aide d'une transformation de Fresnel (la même que précédemment), on a :
$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2} = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$
On écrit alors :
$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{2} = 0 \iff 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}$$
$$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi.$$
Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right\}}$.

3. On résout l'équation sur $\mathscr{D}_{\tan}$. On a :
$$3\tan^2(x) - 4\sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$$
$$\iff X = \tan(x) \text{ et } 3X^2 - 4\sqrt{3}X + 3 = 0.$$
Résolvons l'équation $3X^2 - 4\sqrt{3}X + 3 = 0$. Un calcul de discriminant fournit les deux solutions : $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$. Ainsi :
$$3\tan^2(x) - 4\sqrt{3}\tan(x) + 3 = 0$$
$$\iff \tan(x) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\tfrac{\pi}{3}\right) \ \underline{\textbf{ou}}\ \tan(x) = \sqrt{3} = \tan\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \tfrac{\pi}{3} + k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \tfrac{\pi}{6} + k\pi.$$
Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\tfrac{\pi}{3} + k\pi; \tfrac{\pi}{6} + k\pi\right\}}$.

4. On a : $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc
$$2\cos^3(x) - \sin^2(x) - 2\cos(x) = 0 \iff 2\cos^3(x) + \cos^2(x) - 2\cos(x) - 1 = 0$$
$$\iff X = \cos(x) \text{ et } 2X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0$$
Résolvons l'équation $2X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0$. Le réel 1 est racine évidente et après identification on obtient que $2X^3 + X^2 - 2X - 1 = (X-1)(2X^2 + 3X + 1)$ donc (après résolution de l'équation $2X^2 + 3X + 1 = 0$), on obtient que :
$$2X^3 + X^2 - 2X - 1 = 0 \iff X = 1 \ \underline{\textbf{ou}}\ X = -1 \ \underline{\textbf{ou}}\ X = -\frac{1}{2}.$$
On a alors que :
$$2\cos^3(x) - \sin^2(x) - 2\cos(x) = 0$$
$$\iff \cos(x) = 1 \ \underline{\textbf{ou}}\ \cos(x) = -1 \ \underline{\textbf{ou}}\ \cos(x) = -\frac{1}{2}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{k\pi; \frac{2\pi}{3}+2k\pi; -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}}$.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. Tout d'abord, $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

- On a $1+u^2 > 0$ donc $\frac{1-u^2}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a
$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$
- De même, $1+u^2 > 0$ donc $\frac{2u}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a
$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{1} = \sin x.$$
- On a $1-u^2 \neq 0$ si et seulement si $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 1$, c'est-à-dire $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \notin \{-1,1\}$. On doit donc avoir $x \in \mathbb{R}\setminus\left(\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$. On a alors :
$$\frac{2u}{1-u^2} = \frac{2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

2. L'équation est définie pour $\frac{x}{2} \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition est donc $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$.

On pose alors $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, et on utilise les formules de la question précédentes pour transformer l'équation. On est ramenés à résoudre
$$\begin{aligned} &\frac{1-u^2}{1+u^2} - 3\frac{2u}{1+u^2} + 2u - 1 = 0 \\ \iff\ &\frac{1-u^2-6u+2u+2u^3-1-u^2}{1+u^2} = 0 \\ \iff\ &\frac{2u(u^2-u-2)}{1+u^2} = 0. \end{aligned}$$
On doit donc trouver les u tels que le numérateur s'annule. On obtient $u \in \{0,-1,2\}$. On doit ensuite revenir à la variable x, on résout donc

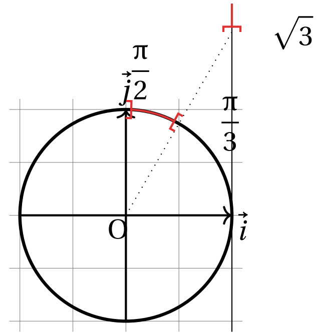
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \frac{x}{2} = k\pi, k\in\mathbb{Z} \iff x = 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \iff \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \iff x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \iff \frac{x}{2} = \arctan(2)+k\pi, k\in\mathbb{Z} \iff x = \arctan(2)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{S = \{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2\arctan 2+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$$

Ici, $\arctan 2$ désigne l'unique réel tel que $\tan(\arctan 2) = 2$. Nous verrons et comprendrons mieux cette notation plus tard.

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. On se ramène à une inéquation fondamentale :
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x) > 1 \iff \tan(3x) > \sqrt{3} \quad (\star)$$
On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :
$$\begin{aligned} (\star) &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{3}+k\pi < 3x < \frac{\pi}{2}+k\pi \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}. \end{aligned}$$
On obtient : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right[}$.



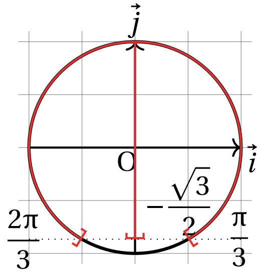
On refait alors un autre cercle trigonométrique (à faire) afin de placer les angles solutions et on obtient, en prenant $k \in [\![0,5]\!]$:
$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[\tfrac{\pi}{9},\tfrac{\pi}{6}\right]\cup\left]\tfrac{4\pi}{9},\tfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\tfrac{7\pi}{9},\tfrac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\tfrac{10\pi}{9},\tfrac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\tfrac{13\pi}{9},\tfrac{3\pi}{2}\right]\cup\left]\tfrac{16\pi}{9},\tfrac{11\pi}{6}\right]}.$$
Enfin, on a :
$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\tfrac{8\pi}{9},-\tfrac{5\pi}{6}\right[\cup\left]-\tfrac{5\pi}{9},-\tfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]-\tfrac{\pi}{3},-\tfrac{\pi}{6}\right[\cup\left[\tfrac{\pi}{9},\tfrac{\pi}{6}\right]\cup\left]\tfrac{4\pi}{9},\tfrac{\pi}{2}\right]\cup\left]\tfrac{7\pi}{9},\tfrac{5\pi}{6}\right[}.$$

2. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :
$$\sin(3x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$



On fait un cercle trigonométrique pour placer les solutions, et on obtient, en prenant $k \in [\![0, 2]\!]$:

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9}, 2\pi\right]}.$$

Et finalement :

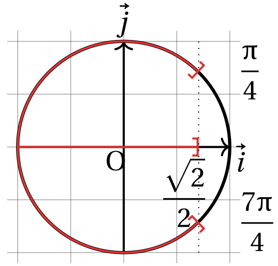
$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{8\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9}, \pi\right]}.$$

3. On a : $\sqrt{2}\cos(3x) \leqslant 1 \iff \cos(3x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$$\cos(3x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant 3x \leqslant \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$



Afin de donner les solutions dans $[0, 2\pi[$ et dans $[-\pi, \pi]$, on représente les solutions sur un cercle trigonométrique en prenant $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right]}.$$

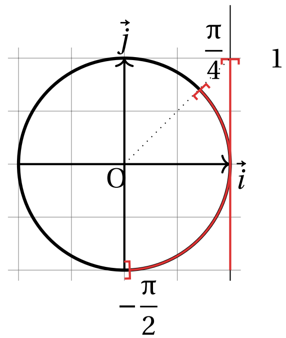
Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{9\pi}{12}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12}, \pi\right]}.$$

4. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

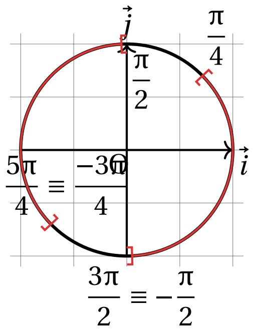
$$\tan(x) \leqslant 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

On obtient : $\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]}$.



Attention, les solutions pour la tangente sont définies modulo π, et non 2π. Il y a donc deux intervalles solutions à tracer sur le cercle trigonométrique. On a donc : $\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}$. Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]}.$$


$\vec{j}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\vec{i}$
O
$\frac{5\pi}{4} \equiv \frac{-3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}$