

Programme de colles

du 14 au 18/10/2024

- Cette semaine : 1 question de cours en Maths et 1 question de cours en Info.

1. [MATHS] LOGIQUE, ENSEMBLES & RAISONNEMENTS



Attention

On évitera tout exercice théorique de logique, on contrôlera les notions plutôt *via* les techniques de raisonnements.

- **Logique élémentaire.** Proposition logique, équivalence. Objet python `bool`. Quantificateurs. Opérations logiques **ou**, **et**, **non** sur les propositions. Négation de propositions avec quantificateurs. Implication, négation d'une implication, contraposée, transitivité et cycles d'implications.
- **Ensembles.** Définition intuitive, ensembles d'entiers, inclusion, égalité. Ensemble des parties. Opérations sur les ensembles, parties disjointes. Complémentaire. Produit cartésien.
- **Raisonnements.** Sur l'existence/unicité de propositions. Sur les ensembles. Disjonction de cas. Sur les liens logiques entre propositions, raisonnement par l'absurde. Raisonnements par récurrence.

2. [MATHS] NOMBRES RÉELS



Attention

- Les puissances x^α avec α non entier n'ont pas encore été vues, nous n'avons pas encore revu la forme exponentielle des puissances entières. On évitera donc pour le moment les équations / inéquations faisant intervenir ce type de puissance.
- Les réunions et intersections quelconques d'ensembles n'ont pas encore été



vues, de-même que la notation de partition d'ensembles.

- Les exercices « epsilonques » sur la borne supérieure ou inférieure ne sont pas dans l'esprit du programme. On évitera d'interroger sur le sujet en dehors des questions de cours.
- La partie entière n'a pas encore été étudiée en tant que fonction. Ce sera fait dans un prochain chapitre.

- **Opérations de bases.** Addition / Multiplication, règles de calcul sur les fractions, forme irréductible. Inégalité, minimum maximum de deux réels. Manipulation d'encadrements. Puissances entières d'un réel, identités remarquables. Racines carrées et cubiques. Propriétés des racines. Valeur absolue et distance entre deux réels. Inégalité triangulaire.
- **Sous-ensembles de \mathbb{R} .** Ensembles usuels. Intervalles. Écriture d'intervalles à l'aide de la valeur absolue.
- **Résolution d'équations & inéquations.** Aspect logique : travail par équivalences ou par implications (élimination de « solutions parasites »). Techniques propres aux : produits, quotients, second degré et généralisation aux ordres supérieurs lorsqu'une racine évidente est connue, transformations exponentielles et logarithmiques, avec racines et valeurs absolues, par études de fonctions. Résolution de systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues.
- **Parties majorées / minorées et partie entière.** Définition de partie majorée / minorée / bornée, notion de borne supérieure / inférieure, maximum / minimum. Partie entière : définition et caractérisation comme plus grand entier inférieur à un réel.

3. [MATHS] TRIGONOMÉTRIE



Attention

- Les seules formules de trigonométrie au programme sont celles du programme de colles : angles associés, formules d'addition, de duplication et de linéarisation. Tout autre formule ($\cos x + \cos y$ par exemple, angle moitié *etc.*) est **hors-programme**.
- \cos , \sin , \tan n'ont pas encore été étudiées en tant que fonction. Ce sera fait dans un prochain chapitre.

- **[Généralités]** Définition de cos, sin, tan à l'aide du cercle trigonométrique. Premières propriétés (périodicité et parité), relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Valeurs remarquables.
- **[Formules trigonométriques]** Angles associés. Formules d'addition, de duplication et de linéarisation. Transformation de combinaisons linéaires trigonométriques en un seul terme trigonométrique.
- **[Équations et inéquations trigonométriques]** Équations à l'aide d'un théorème (que l'on peut retrouver graphiquement) et inéquations à l'aide d'un dessin.

4.

[MATHS] FONCTIONS

Attention L'objectif de ce chapitre est de balayer toutes les notions permettant d'effectuer une étude complète de fonction **simple** :

- des généralités, en incluant la notion de composée, mais pas encore de fonction bijective.
 - Des calculs pratiques de limites : règles usuelles, croissances comparées, théorèmes d'encadrement/majoration/minoration et quelques techniques pour lever des formes indéterminées. **Pas encore d'équivalents, et de théorème de convergence monotone etc..**
 - La définition de fonction continue et les opérations classiques sur les fonctions continues mais rien d'autre. **En particulier, pas encore de prolongement par continuité, d'équivalents et de « grands » théorèmes type théorème de la bijection, etc..** Le théorème de la bijection sera vu dans le prochain chapitre. Les études de continuité de fonctions compliquées (avec parties entières par exemples, ou définies par plusieurs expressions) ne sont pas dans l'esprit de ce programme de colles.
 - Des calculs pratiques de dérivées, mais là encore pas encore de « grand » théorème. Dérivée d'une composée notamment, mais pas encore la dérivée d'une réciproque.
 - Les fonctions usuelles, mais pas encore arcsin, arccos, arctan.
- **Généralités.** Fonction, et application. Image d'une fonction, graphe. Opérations sur les fonctions. Composée. Parité, imparité, périodicité. Sens de variation. Fonctions bornées, majorées, minorées.

- **Calculs de limites & Continuité.** Limite à droite/gauche. Opérations. Composition des limites. Théorème d'encadrement, de majoration/minoration. Croissances comparées. Continuité en un point, sur un intervalle. Opérations et compositions de fonctions continues.
- **Calculs de dérivées.** Nombre dérivé, fonction dérivable. Équation de la tangente. Dérivable implique continue. Dérivée d'une composée. Monotonie et dérivée. Utilisation de la dérivation pour calculer des limites.
- **Fonctions usuelles.** Polynômes, carré, cube. Monôme inverse, racine carrée, limites de racines par expression conjuguée. Logarithme népérien, logarithme décimal. Puissances sous forme exponentielle. Valeur absolue. Partie entière. Fonctions circulaires : sin, cos et tan.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir la valeur absolue et citer l'inégalité triangulaire. Montrer que :

$$[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \right\} \quad \text{pour } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } a \leq b.$$

2. Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.
3. Définition d'un majorant d'une partie. Définition de la borne supérieure, en précisant notamment sous quelle hypothèse elle existe.
4. Définir la partie entière. Expliquer les valeurs de $[3.1], [-4.5]$.
5. Donner l'ensemble des solutions de $\cos x = \cos y$ où $y \in \mathbb{R}$. Application à :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{sur } [0, 2\pi[.$$

Même question avec $\sin x = \sin y$ où $y \in \mathbb{R}$. Application à :

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{sur }]-2\pi, 0].$$

6. Résoudre $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$ en $x \in \mathbb{R}$.
7. Donner la définition de fonction dérivable en un point a , et de $f'(a)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ selon deux méthodes. (*d'une part en reconnaissant un taux d'accroissement, d'autre part en simplifiant l'expression.*)
8. Domaine de définition et dérivabilité de g définie par $g(x) = \frac{x \ln(x)}{e^{x^2}}$, puis calcul de la dérivée.
9. Fonction usuelle tan : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites remarquables, dérivabilité.
10. \triangleright Écrire une fonction d'en-tête $\text{facto}(n)$, où n est un entier, qui renvoie la valeur de $n!$. (*Remarque : la factorielle $n!$ a pour le moment uniquement été définie en TP d'Info*)

11. ➤_☞ Écrire une fonction d'en-tête $\text{harmonic}(n)$, n étant un entier strictement positif, et qui renvoie la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.
12. ➤_☞ Écrire un programme prenant en argument un entier n et qui renvoie la valeur u_n , la suite (u_n) étant définie par $u_0 = 4$, $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = 2 - \frac{u_n}{2}$.

— Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours —

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les sommes et produits.