

Programme de colles

du 4 au 8/11/2024

- Cette semaine : 1 question de cours. Concernant les sommes et produits : uniquement des questions de cours cette semaine, pas encore d'exercices.

1. [MATHS] FONCTIONS



Remarque : éviter les exercices avec uniquement des calculs de limites (ou alors 1 ou 2 maximum). Priorité aux études de fonctions dans ce chapitre.

Attention

L'objectif de ce chapitre est de balayer toutes les notions permettant d'effectuer une étude complète de fonction **simple** :

- des généralités, en incluant la notion de composée, mais pas encore de fonction bijective.
 - Des calculs pratiques de limites : règles usuelles, croissances comparées, théorèmes d'encadrement/majoration/minoration et quelques techniques pour lever des formes indéterminées. **Pas encore d'équivalents, et de théorème de convergence monotone etc.**
 - La définition de fonction continue et les opérations classiques sur les fonctions continues mais rien d'autre. **En particulier, pas encore de prolongement par continuité, d'équivalents et de « grands » théorèmes type théorème de la bijection, etc.** Le théorème de la bijection sera vu dans le prochain chapitre. Les études de continuité de fonctions compliquées (avec parties entières par exemples, ou définies par plusieurs expressions) ne sont pas dans l'esprit de ce programme de colles.
 - Des calculs pratiques de dérivées, mais là encore pas encore de « grand » théorème. Dérivée d'une composée notamment, mais pas encore la dérivée d'une réciproque.
 - Les fonctions usuelles, mais pas encore arcsin, arccos, arctan.
- **Généralités.** Fonction, et application. Image d'une fonction, graphe. Opérations sur les fonctions. Composée. Parité, imparité, périodicité. Sens de variation. Fonctions bornées, majorées, minorées.
 - **Calculs de limites & Continuité.** Limite à droite/gauche. Opérations. Composition des limites. Théorème d'encadrement, de majoration/minoration. Croissances comparées. Continuité en un point, sur un intervalle. Opérations et compositions de fonctions continues.
 - **Calculs de dérivées.** Nombre dérivé, fonction dérivable. Équation de la tangente. Dérivable implique continue. Dérivée d'une composée. Monotonie et dérivée. Utilisation de la dérivation pour calculer des limites.

- **Fonctions usuelles.** Polynômes, carré, cube. Monôme inverse, racine carrée, limites de racines par expression conjuguée. Logarithme népérien, logarithme décimal. Puissances sous forme exponentielle. Valeur absolue. Partie entière. Fonctions circulaires : sin, cos et tan.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner la formule pour $S_n = \sum_{k=0}^n k, n \geq 0$. La démontrer à l'aide d'un changement d'indice par retournement.
2. Donner la formule pour $\sum_{k=0}^n k^2, n \geq 0$. La démontrer par récurrence.
3. Soient n, p deux entiers tels que $n \geq p$. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^n (a_{k+2} - a_k)$ à l'aide d'un changement d'indice.
4. Donner la définition de $n!, n \geq 0$. Calculer $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k}(k+3), n \geq 1$ et exprimer le résultat à l'aide de factorielles.
5. ➤_☞ Écrire une fonction d'en-tête somme(p, n, x) et renvoyant $\sum_{k=p}^n \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}, n, p$ deux entiers relatifs.
6. ➤_☞ Écrire une fonction d'en-tête produit(p, n, x) et renvoyant $\prod_{k=p}^n e^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}, n, p$ deux entiers relatifs.
7. Donner la définition de fonction dérivable en un point a , et de $f'(a)$. En déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ selon deux méthodes. (d'une part en reconnaissant un taux d'accroissement, d'autre part en simplifiant l'expression.)
8. Domaine de définition et dérivabilité de g définie par $g(x) = \frac{x \ln(x)}{e^{x^2}}$, puis calcul de la dérivée.
9. Fonction usuelle tan : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites remarquables, dérivabilité.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les sommes et produits en exercices, et le début des complexes.