Programme de colles
du 18 au 22/11/2024

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths **et 1** question de cours en Info.
- **Pas** de sommes doubles cette semaine en exercices.

1. [MATHS] CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS

Attention

L'identité $a^n - b^n$ a été vue, mais l'énoncé n'est pas exigible des étudiant(e)s.

- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de BERNOULLI « $a^n - b^n$ » [H.P] . Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, PASCAL. Triangle de PASCAL, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.

2. [MATHS] NOMBRES COMPLEXES

Pas d'exercices trop techniques (du moins en début de colle) sur les complexes. Il s'agit d'insister sur les thèmes suivants : résolution d'équations (second degré pour préparer EDL_2 *et* SRL_2*, racines de complexes), calculs (formes algébriques/exponentielles), déterminer une forme exponentielle et applications en trigonométrie.*

Attention

- L'exponentielle générale e^z (sauf si $z \in i\mathbb{R}$) n'est pas au programme, mais peut faire l'objet d'exercices si la définition est donnée.
- Au sujet des racines n-ièmes : aucun résultat n'est au programme, même pour l'unité. Les étudiant(e)s doivent uniquement être capables de les calculer sur des exemples en cherchant les solutions sous forme exponentielle, éventuellement algébrique si $n = 2$.
- Les équations du second degré à coefficients non réels sont hors-programmes.
- Les applications en géométrie ne sont pas au programme non plus ; en particulier, l'interprétation d'angles orientés à l'aide d'un argument.

- **Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique.** Définition de $\mathbb{C}$ comme un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un élément i vérifiant $i^2 = -1$. Unicité de la forme algébrique. Notation pour le complexe j . Identité remarquable $a^2 + b^2$. Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés. Complexes de module 1.
- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de MOIVRE. Expression exponentielle de j , et propriétés de j . Formule d'EULER, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moitié pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle. Racines n-ièmes de complexes, cas de la racine carrée à l'aide de la forme algébrique. Équations du second degré à coefficients réels : extension des formules du lycée au cas $\Delta < 0$.
- **Applications en trigonométrie.** Linéarisation, anti-linéarisation (MOIVRE et angle moitié), sommes trigonométriques en « complexifiant » les sommes.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner la formule pour $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$, $n \geqslant 0$. La démontrer à l'aide d'un changement d'indice par retournement.
2. Donner la formule pour $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $n \geqslant 0$. La démontrer par récurrence.
3. Soient n, p deux entiers tels que $n \geqslant p$. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+2} - a_k)$ à l'aide d'un changement d'indice.

4. Donner la définition de $n!, n \geqslant 0$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3), n \geqslant 1$ et exprimer le résultat à l'aide de factorielles.
5. Énoncer la formule générale du binôme et développer ensuite $(a+b)^3, (a+b)^4$ à l'aide de cette formule.
6. Énoncer la formule générale du binôme et expliquer les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.
7. Écrire une fonction d'en-tête `somme(p, n, x)` et renvoyant $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$, n, p deux entiers relatifs.
8. Écrire une fonction d'en-tête `produit(p, n, x)` et renvoyant $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$, n, p deux entiers relatifs.
9. Écrire une fonction d'en-tête `sommedouble(n, p)` et renvoyant $\sum_{p \leq i, j \leq n} (j-i)^2$, n, p deux entiers positifs.
10. Définir le module d'un complexe, puis rappeler l'expression à l'aide du conjugué. Démontrer que : $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$ si $z, z' \in \mathbb{C}$.
11. Définir l'exponentielle imaginaire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et citer les formules d'Euler. Rappeler la forme exponentielle du complexe j. En déduire : la forme algébrique de j, que $\mathrm{j}^3 = 1$, et enfin que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
12. Déterminer la forme exponentielle $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi[$ uniquement.
13. Calculer les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ à l'aide de la forme algébrique.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les sommes doubles, les applications pour la semaine d'après.