Programme de colles
du 2 au 6/12/2024

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths. Sur les primitives, uniquement des questions de cours cette semaine.

1. [MATHS] INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS. BIJECTIONS NUMÉRIQUES.

Attention

- L'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.
- Conformément au programme de BCPST, on limitera les exercices aux fonctions numériques dans un premier temps. À la rigueur, dans un second temps, des applications complexes, de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ linéaire (avec calcul de réciproque), *etc.*. On évitera tout exercice théorique.
- Éviter les exercices non guidés sur arcsin et arccos (même sans fonction), le(s) question(s) de cours suffira(ont).

- **Fonctions & Applications.** Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Identité. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque.
- **Applications aux fonctions numériques.** Bijection numérique, obtenir le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f. Théorème de la bijection continu : utilisation pour l'existence et l'unicité d'une solution à une équation (plusieurs exemples, cas d'une suite implicite), utilisation pour déterminer des images directes de parties en combinant éventuellement avec la propriété « $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \dots$ ». Retour sur la racine cubique : existence et unicité, expression exponentielle. Dérivabilité d'une bijection réciproque. Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos (définition, relations arcsin(sin(...)) = ..., sin(arcsin(...)) = ...), arctan (étude complète : définition, relations arctan(tan(...)) = ..., tan(arctan(...)) = ..., parité, dérivée, limites, graphe).

Attention

Aucune autre notion que celles indiquées entre parenthèses ne sont au programme pour arcsin, arccos, mais cela peut faire l'objet d'exercices guidés.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application. Écrire la **définition** *(avec quantificateurs!)* de « f injective » et « f surjective ». Écrire ensuite la négation de ces deux propriétés.
2. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Expliquer ce qu'est $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (définition). Rappeler les formules pour $(g\circ f)^{-1}, (f^{-1})^{-1}$.
3. Citer le théorème de la bijection. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :
$$\exists!\, x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{e}^{-x} = x.$$
4. Citer le théorème de la bijection. Montrer que le polynôme $x \longmapsto x^3 + tx - 1$ admet une unique racine réelle $u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
5. Définir les fonctions arccos, arcsin *(uniquement la définition en utilisant le théorème de la bijection)*. Réciter et compléter :
$$\forall x\in\dots,\quad \arccos(\cos(x)) = \dots \quad \text{et} \quad \forall x\in\dots,\quad \cos(\arccos(x)) = \dots,$$
$$\forall x\in\dots,\quad \arcsin(\sin(x)) = \dots \quad \text{et} \quad \forall x\in\dots,\quad \sin(\arcsin(x)) = \dots.$$
6. Fonction usuelle arctan : définition, parité, allure du graphe, limites aux bornes du domaine, et dérivée/dérivabilité à **justifier**.
7. Rappeler le domaine de dérivabilité d'arctan, la dérivée et montrer la formule ci-après : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0. \end{cases}$
8. Donner l'expression intégrale de l'unique primitive d'une fonction continue f s'annulant en a qui appartient au domaine de continuité de f. En déduire l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.
9. Citer la formule d'intégration par parties *(avec hypothèse(s))* puis calculer :
$$\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : primitives et équations différentielles.