Programme de colles
du 9 au 13/12/2024

- On ajoute cette semaine le calcul intégral et celui de primitives. Pas encore d'équations différentielles.
- Cette semaine : <u>**1**</u> question de cours en Maths.

1. [MATHS] INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS. BIJECTIONS NUMÉRIQUES.

Attention

- L'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.
- Conformément au programme de BCPST, on limitera les exercices aux fonctions numériques dans un premier temps. À la rigueur, dans un second temps, des applications complexes, de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ linéaire (avec calcul de réciproque), *etc.*. On évitera tout exercice théorique.
- Éviter les exercices non guidés sur arcsin et arccos (même sans fonction), le(s) question(s) de cours suffira(ont).

- **Fonctions & Applications.** Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Identité. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque.
- **Applications aux fonctions numériques.** Bijection numérique, obtenir le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f. Théorème de la bijection continu : utilisation pour l'existence et l'unicité d'une solution à une équation (plusieurs exemples, cas d'une suite implicite), utilisation pour déterminer des images directes de parties en combinant éventuellement avec la propriété « $f(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \dots$ ». Retour sur la racine cubique : existence et unicité, expression exponentielle. Dérivabilité d'une bijection réciproque. Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos (définition, relations $\arcsin(\sin(\dots)) = \dots$, $\sin(\arcsin(\dots)) = \dots$), arctan (étude complète : définition, relations $\arctan(\tan(\dots)) = \dots$, $\tan(\arctan(\dots)) = \dots$, parité, dérivée, limites, graphe).

Attention

Aucune autre notion que celles indiquées entre parenthèses ne sont au programme pour arcsin, arccos, mais cela peut faire l'objet d'exercices guidés.

2. [MATHS] CALCULS DE PRIMITIVES, INTÉGRALES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

- **Calculs de primitives & d'intégrales.** Généralités, propriétés, structure de l'ensemble des primitives. Définition de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R}$, à l'aide d'une primitive, propriétés utiles pour le calcul de primitives (linéarité, croissance, positivité, relation de Chasles). Lien entre primitive et intégrale/relation fondamentale de l'analyse. Techniques de calculs d'intégrales : intégration par parties et changement de variable pour les intégrales sur un segment de fonctions continues, primitive du logarithme. Intégrales de fonctions paires/impaires/périodiques. Primitives usuelles. Cas des fractions rationnelles.

Attention

Ce premier chapitre d'intégration est encore partiel : uniquement des calculs d'intégrales. Ne sont <u>**pas**</u> encore au programme des exercices :

- les intégrales à deux bornes variables,
- les sommes de Riemann,
- tout ce qui est majoration / minoration d'intégrales,
- l'étude de monotonie d'intégrales à paramètre ou de suites.

J'ai effectué divers exemples de primitivations de fractions rationnelles, mais les élèves doivent être guidés sur ce type de fonctions (notamment sur la décomposition en éléments simples).

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Citer le théorème de la bijection. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$ possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :
$$\exists!\, x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = x.$$

2. Citer le théorème de la bijection. Montrer que le polynôme $x \longmapsto x^3 + tx - 1$ admet une unique racine réelle $u(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

3. Définir les fonctions arccos, arcsin *(uniquement la définition en utilisant le théorème de la bijection)*. Réciter et compléter :
$$\forall x \in \dots, \quad \arccos(\cos(x)) = \dots \quad \text{et} \quad \forall x \in \dots, \quad \cos(\arccos(x)) = \dots,$$
$$\forall x \in \dots, \quad \arcsin(\sin(x)) = \dots \quad \text{et} \quad \forall x \in \dots, \quad \sin(\arcsin(x)) = \dots.$$

4. Fonction usuelle arctan : définition, parité, allure du graphe, limites aux bornes du domaine, et dérivée/dérivabilité à **justifier**.

5. Rappeler le domaine de dérivabilité d'arctan, la dérivée et montrer la formule ci-après : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

6. Donner l'expression intégrale de l'unique primitive d'une fonction continue f s'annulant en a qui appartient au domaine de continuité de f. En déduire l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.

7. Rappeler une primitive de tan. Donner une primitive de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ lorsque $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$ et $g : x \longmapsto x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$ sur un domaine à préciser.

8. Citer la formule d'intégration par parties *(avec hypothèse(s))* puis calculer :
$$\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Citer la formule de changement de variable, puis calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t}$.

10. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x$.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : équations différentielles d'ordre 1 et 2.