# Programme de colles
## du 16 au 20/12/2024

- Cette semaine : <u>**1**</u> question de cours en Maths.


## 1. [MATHS] CALCULS DE PRIMITIVES, INTÉGRALES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

- **Calculs de primitives & d'intégrales.** Généralités, propriétés, structure de l'ensemble des primitives. Définition de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R}$, à l'aide d'une primitive, propriétés utiles pour le calcul de primitives (linéarité, croissance, positivité, relation de CHASLES). Lien entre primitive et intégrale/relation fondamentale de l'analyse. Techniques de calculs d'intégrales : intégration par parties et changement de variable pour les intégrales sur un segment de fonctions continues, primitive du logarithme. Intégrales de fonctions paires/impaires/périodiques. Primitives usuelles. Cas des fractions rationnelles.

**Attention**

Ce premier chapitre d'intégration est encore partiel : uniquement des calculs d'intégrales. Ne sont <u>**pas**</u> encore au programme des exercices :
- les intégrales à deux bornes variables,
- les sommes de RIEMMANN,
- tout ce qui est majoration / minoration d'intégrales,
- l'étude de monotonie d'intégrales à paramètre ou de suites.

J'ai effectué divers exemples de primitivations de fractions rationnelles, mais les élèves doivent être guidés sur ce type de fonctions (notamment sur la décomposition en éléments simples).

- **Équations différentielles.** Définition générale $y^{(n)} = f(t, y', \dots, y^{(n-1)})$, puis définition d'une équation différentielle linéaire. Cas des équations différentielles linéaires d'ordre $n$ : définition de l'homogène associée, l'ensemble des solutions de l'homogène est stable par combinaison linéaire, toute solution de l'équation générale s'exprime sous la forme d'une solution de l'homogène et d'une solution particulière. Cas de l'ordre 1 : résolution de l'homogène et variation de la constante pour trouver une solution particulière, cas de coefficients constants. Cas de l'ordre 2 : résolution de l'homogène et solution particulière dans le cas d'un second membre constant (en fonction du fait que 0 est racine simple, double ou pas racine de l'équation caractéristique). Problèmes de CAUCHY d'ordre 1 et 2. Technique du changement de fonction inconnue pour transformer une équation différentielle que l'on ne sait pas résoudre en une équation différentielle que l'on sait résoudre.

**Attention**

Pour l'ordre 2, une résolution faisant intervenir un second membre plus général qu'une constante doit être guidée.

## 2. [MATHS] SUITES RÉCURRENTES USUELLES & MODÉLISATION

- **Suites récurrentes usuelles.** Définition d'une suite. Suites récurrentes usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- **Modélisation de dynamiques continues.** Taux d'évolution comme $\frac{y'}{y}$. Mise en

équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre $t$ et $t+h$. Dynamique des populations : éléments sur le modèle de MALTHUS et ceux à capacité de milieu (logistique et GOMPERTZ) dans le cas continu. Remarques sur le modèle de LOKTA-VOLTERRA.

- **Modélisation de dynamiques discrètes.** Taux d'évolution comme $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre $n$ et $n+1$. Dynamique des populations : adaptation des modèles précédents au cas discret.

**Attention**

- Les deux dernières sections précédentes « Modélisation de dynamiques continues et discrètes » ont pour but de présenter le vocabulaire des sujets de modélisation, et divers contextes à décrire avec des suites ou équations différentielles. *Pour les élèves : pas de cours à apprendre dans ces deux sections.*
- Rien d'autre sur les suites pour le moment (que les récurrences usuelles), la notion de limite n'a pas encore été revue. En particulier, nous n'avons pas encore vu les algorithmes classiques sur les suites en Python.
- L'idée de ce chapitre : en plus des suites récurrentes usuelles, des exercices sur les équations différentielles et suites récurrentes avec contexte et/ou modélisation.

## QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner l'expression intégrale de l'unique primitive d'une fonction continue $f$ s'annulant en $a$ qui appartient au domaine de continuité de $f$. En déduire l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.
2. Rappeler une primitive de tan. Donner une primitive de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ lorsque $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$ et $g : x \longmapsto x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$ sur un domaine à préciser.
3. Citer la formule d'intégration par parties *(avec hypothèse(s))* puis calculer : $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Citer la formule de changement de variable, puis calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u=\sqrt{t}$.
5. Résolution complète de : $y'+3x^2y=\mathrm{e}^{x-x^3}$.
6. Citer le théorème donnant l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dans les cas $\Delta=0$ et $\Delta<0$.
7. Résolutions de $y''-\omega^2y=0$ et $y''+\omega^2y=0$ (où $\omega$ est un réel non nul).
8. Donner la définition (récurrente) d'une suite arithmético-géométrique. Soit une suite $(u_n)$ vérifiant $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=3u_n+2$. Déterminer une expression explicite en fonction de $n$ de $(u_n)$, puis calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
9. Citer le théorème donnant l'expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dans les cas $\Delta=0$ et $\Delta>0$.

**Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours**

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

*À venir : calcul matriciel.*