Programme de colles
du 6 au 10/1/2025

- Cette semaine : 1 question de cours en Maths.

1. [MATHS] CALCUL MATRICIEL

Attention

- Au sujet des matrices inversibles : la technique d'échelonnement par pivot de Gauß (et par résolution d'un système linéaire) n'a pas encore été vue, elle le sera dans un futur chapitre. Seules les techniques listées ci-dessous sont au programme : définition, polynôme annulateur, à l'aide d'une forme diagonalisée. Ainsi, par exemple, « déterminer l'inverse de P » où P est une matrice 3×3 quelconque sans autre indication, est pour le moment hors-programme.
- Le déterminant est au programme uniquement en dimension 2.
- Les exercices faisant travailler sur le terme général plutôt que des tableaux : à garder plutôt pour la fin de la colle si le reste a été réussi.
- Bien sûr, en ce qui concerne les matrices diagonalisables, les élèves ne savent pas encore comme trouver la matrice P associée. L'idée est pour le moment uniquement de mettre en place la définition et mettre en garde par rapport aux confusions classiques avec d'autres notions (inversibilité par exemple). La seule application de la diagonalisation vue pour le moment est le calcul des puissances.
- Un TP d'info plus complet sur les tableaux numpy sera fait plus tard, mais n'hésitez pas à poser déjà en exercice une question demandant de coder une matrice sous forme de tableau numpy.

- **Matrices & Opérations.** Généralités, égalité matricielle, matrices usuelles (nulle, identique, homothétique, Attila, élémentaires). Opérations sur les matrices (somme, multiplication externe, multiplication interne). Transposition notée $A^\top$ et propriétés. Codage d'une matrice en Python.
- **Matrices carrées.** Puissances, règles, matrice nilpotente. Cas d'une matrice diagonale. Formule du binôme matriciel. Calcul des puissances à l'aide d'un polynôme annulateur. Inversibilité matricielle : définition, propriétés, équivalence d'un inverse à droite ou à gauche (admise), simplification matricielle par une matrice inversible, équation-produit où l'une des matrices est inversible. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires. Premières techniques de calcul d'inverses : existence d'un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cas d'une matrice 2×2 et définition du déterminant dans ce cas-là. Matrices semblables, diagonalisables et trigonalisables. Application au calcul de puissances. Reformulation d'une récurrence linéaire à l'aide d'une matrice.

2. [MATHS] SUITES RÉCURRENTES USUELLES & MODÉLISATION

- **Suites récurrentes usuelles.** Définition d'une suite. Suites récurrentes usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- **Modélisation de dynamiques continues.** Taux d'évolution comme $\frac{y'}{y}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre t et $t+h$. Dynamique des populations : éléments sur le modèle de Malthus et ceux à capacité de milieu (logistique et Gompertz) dans le cas continu. Remarques sur le modèle de Lokta-Volterra.
- **Modélisation de dynamiques discrètes.** Taux d'évolution comme $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre n et $n+1$. Dynamique des populations : adaptation des modèles précédents au cas discret.

Attention

- Les deux dernières sections précédentes « Modélisation de dynamiques continues et discrètes » ont pour but de présenter le vocabulaire des sujets de modélisation, et divers contextes à décrire avec des suites ou équations différentielles. *Pour les élèves : pas de cours à apprendre dans ces deux sections.*
- Rien d'autre sur les suites pour le moment (que les récurrences usuelles), la notion de limite n'a pas encore été revue. En particulier, nous n'avons pas encore vu les algorithmes classiques sur les suites en Python.

- L'idée de ce chapitre : en plus des suites récurrentes usuelles, des exercices sur les équations différentielles et suites récurrentes avec contexte et/ou modélisation.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner l'expression en somme du coefficient $(\mathrm{AB})_{i,j}$ d'une matrice produit. Rappeler (puis démontrer) la formule : $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^\top = \dots$. *(Pour les élèves : en ce qui concerne le produit matriciel, on indique clairement quels sont les formats des matrices* A *et* B*, puis le format de* AB*, avant d'énoncer la formule. Même chose pour* $(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^\top$*)*

2. Rappeler ce qu'est la matrice J_2. Conjecturer l'expression de J_2^n pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis la démontrer par récurrence.

3. Énoncer la formule du binôme matriciel. Application au calcul des puissances de $\mathrm{A} = \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. *(Pour les élèves : on expliquera soigneusement pourquoi la seconde somme est nulle (soit en invoquant la nilpotence pour les grandes valeurs de* p*, ou la convention sur les sommes pour les petites valeurs de* p*))*

4. Définir la notion de matrice inversible. Rappeler (puis démontrer) les formules :
$$(\mathrm{A}\times\mathrm{B})^{-1} = \dots,\quad (\mathrm{A}^\top)^{-1} = \dots.$$

5. Définir la notion de matrice inversible, et calculer l'inverse de $\mathrm{M} = \begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$ en commençant par montrer que $\mathrm{M}^2+2\mathrm{M}-3\mathrm{I}_3 = 0_3$.

6. Donner la définition de matrices semblables. Lorsque $\mathrm{A}\sim\mathrm{B}$, montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\mathrm{A}^n\sim\mathrm{B}^n$.

7. Donner la définition de matrice diagonalisable. En utilisant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, montrer que $\mathrm{J}_2 = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ est diagonalisable. Expliquer oralement comment vous feriez pour obtenir J_2^n avec $n\in\mathbb{N}$.

8. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :
$$\forall (i,j)\in\{1,\dots n\}^2,\quad \mathrm{A}_{ij} = (i+j)^2.$$
Écrire une fonction d'en-tête `creer_matriceA(n)` qui renvoie A représentée en tableau `numpy`.

9. *« On considère une réaction chimique notée* $\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{B}$*, on suppose que le réactif* A *disparait entre deux instants très proches* t, $t+h$ *de manière proportionnelle au temps écoulé et à la concentration* $[\mathrm{A}]$ *en réactif* A *présent au début de l'intervalle de temps. »*
Modéliser la situation, et résoudre.

10. *« La pyrale est une chenille invasive qui s'attaque aux buis. Selon un relevé statistique, chaque année, le nuisible fait disparaitre* 15% *des buis du massif. Alors que l'on compte en 2017, 75000 pieds de buis, l'ONF préconise de replanter 3000 plants chaque année pour compenser les dégâts de la pyrale. »*
Modéliser la situation dans les 2 cas (en suivant la préconisation de l'ONF ou pas), résoudre puis interpréter.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : suites numériques (début)