# Programme de colles

## du 20 au 24/1/2025

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths.
- Sur les suites : pas encore d'Informatique cette semaine.

## 1. [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES

- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers $\pm\infty$ par majoration/-minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'EULER. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

**Attention**

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites récurrentes : que des exercices guidés avec questions intermédiaires. Poser « étudier telle suite récurrente » sans questions intermédiaires n'est pas dans l'esprit du programme (sauf si la récurrence est usuelle bien sûr).
- Au sujet des suites implicites : l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

## QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Citer le théorème d'encadrement et rappeler la définition de la partie entière. Application à : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $\mathrm{H}_n \xrightarrow[]{n\to\infty} \infty$.
3. Citer le théorème de la limite monotone. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Montrer que : $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, puis en déduire que $\mathrm{H}_n \xrightarrow[]{n\to\infty} \infty$, en **admettant** que $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{1+k}$. Montrer que $(\mathrm{S}_n)$ converge en montrant que $(\mathrm{S}_{2n})$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})$ sont adjacentes.
5. Rappeler l'équivalent de $\cos u_n - 1$, $(1+u_n)^\alpha - 1$ et $\ln(1+u_n)$ sous une hypothèse à rappeler portant sur $(u_n)$. Déterminer : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer l'existence d'une unique suite $(x_n)$ vérifiant $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x_n)$ est décroissante. *(Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe $f_{n+1}(x_n)$ (version du cours) ou de $f_n(x_{n+1})$...)*

**Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours**

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

*À venir : échelonnement matriciel, systèmes linéaires.*