

# Programme de colles

du 27 au 31/1/2025

- Cette semaine : 1 question de cours en Maths et de l'informatique sur les suites (soit en question de cours, soit pendant l'exercice).
- Rien de nouveau au programme à part l'aspect informatique des suites.

## 1. [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES



- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers  $\pm\infty$  par majoration/minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'EULER. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- **➤\_🔗 Informatique.** Fonctions permettant de :
  - ◇ calculer un terme donné d'une suite,
  - ◇ calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois,
  - ◇ de construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée,
  - ◇ tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

### Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites récurrentes : que des exercices guidés avec questions intermédiaires. Poser « étudier telle suite récurrente » sans questions intermédiaires n'est pas dans l'esprit du programme (sauf si la récurrence est usuelle

bien sûr).

- Au sujet des suites implicites : l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

## QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Citer le théorème d'encadrement et rappeler la définition de la partie entière. Application à :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . En admettant que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$ , justifier que :  $H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .
3. Citer le théorème de la limite monotone. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que :  $(H_n)_{n \geq 1}$  est croissante, puis en déduire que  $H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , en admettant que  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
4. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k}$ . Montrer que  $(S_n)$  converge en montrant que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.
5. Rappeler l'équivalent de  $\cos u_n - 1$ ,  $(1 + u_n)^\alpha - 1$  et  $\ln(1 + u_n)$  sous une hypothèse à rappeler portant sur  $(u_n)$ . Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
6. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $f_n(x) = nx + \ln(x)$ . Montrer l'existence d'une unique suite  $(x_n)$  vérifiant  $f_n(x_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $(x_n)$  est décroissante. (*Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe  $f_{n+1}(x_n)$  (version du cours) ou de  $f_n(x_{n+1})$ ...*)
7. **➤\_🔗** On considère la suite  $(u_n)$ , définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$
Rappeler, en invoquant une autre question de cours, la valeur de  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ . Écrire une fonction d'en-tête `liste_seuil(a, eps)` qui renvoie la liste des termes  $[u_1, \dots, u_n]$  jusqu'à ce que  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .
8. **➤\_🔗** On considère la suite  $(v_n)$ , définie par :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + e^{v_n}. \end{cases}$$
Écrire une fonction d'en-tête `terme_v(a, n)` qui renvoie la valeur de  $v_n$ .

9. ➤ On considère la suite  $(w_n)$ , définie par :

$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n + w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$

Écrire une fonction d'en-tête `terme_w(a, b, n)` qui renvoie la valeur de  $w_n$ .

**Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours**

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

*À venir : échelonnement matriciel, systèmes linéaires, dénombrement.*