

Programme de colles

du 27 au 31/1/2025

- Cette semaine : 1 question de cours en Maths et de l'informatique sur les suites (soit en question de cours, soit pendant l'exercice).
- Rien de nouveau au programme à part l'aspect informatique des suites.

1. [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES



- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers $\pm\infty$ par majoration/minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'EULER. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.
- **➤_🔗 Informatique.** Fonctions permettant de :
 - ◇ calculer un terme donné d'une suite,
 - ◇ calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois,
 - ◇ de construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée,
 - ◇ tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites récurrentes : que des exercices guidés avec questions intermédiaires. Poser « étudier telle suite récurrente » sans questions intermédiaires n'est pas dans l'esprit du programme (sauf si la récurrence est usuelle



bien sûr).

- Au sujet des suites implicites : l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Citer le théorème d'encadrement et rappeler la définition de la partie entière. Application à : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.
3. Citer le théorème de la limite monotone. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que : $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante, puis en déduire que $H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, en **admettant** que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k}$. Montrer que (S_n) converge en montrant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
5. Rappeler l'équivalent de $\cos u_n - 1$, $(1 + u_n)^\alpha - 1$ et $\ln(1 + u_n)$ sous une hypothèse à rappeler portant sur (u_n) . Déterminer : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer l'existence d'une unique suite (x_n) vérifiant $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) est décroissante. (Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe $f_{n+1}(x_n)$ (version du cours) ou de $f_n(x_{n+1})$...)
7. **➤_🔗** On considère la suite (u_n) , définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$
Rappeler, en invoquant une autre question de cours, la valeur de $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Écrire une fonction d'en-tête `liste_seuil(a, eps)` qui renvoie la liste des termes $[u_1, \dots, u_n]$ jusqu'à ce que $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
8. **➤_🔗** On considère la suite (v_n) , définie par :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + e^{v_n} \end{cases}$$
Écrire une fonction d'en-tête `terme_v(a, n)` qui renvoie la valeur de v_n .

9. ➤ On considère la suite (w_n) , définie par :

$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n + w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$

Écrire une fonction d'en-tête `terme_w(a, b, n)` qui renvoie la valeur de w_n .

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : échelonnement matriciel, systèmes linéaires, dénombrement.