Programme de colles

du 3 au 7/2/2025

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths **et** de l'informatique sur les suites (soit en question de cours, soit pendant l'exercice).
- Uniquement des questions de cours sur le dénombrement, pas encore d'exercice.
- Sur les suites : merci de poser uniquement cette semaine des questions avec des suites remarquables (récurrentes ou implicites, avec un peu d'info, donc la fin du chapitre).
- Sur l'échelonnement/systèmes : soit juste un système, soit un exercice de synthèse sur les matrices mais avec au moins un inverse de matrice à calculer.

1. [MATHS] ÉCHELONNEMENT MATRICIEL & SYSTÈMES LINÉAIRES

- **Échelonnement matriciel.** Opérations élémentaires, traduction matricielle. Notion de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite, de pivot. Rang d'une matrice définie comme le nombre de pivots.
- **Systèmes linéaires.** Définition. Matrice associée à un système, écriture matricielle. Système de CRAMER. Structure de l'ensemble des solutions. Méthode par substitution sur des systèmes simples. Méthode par échelonnement : présentation sous forme de matrice augmentée, ou de système directement, notion d'inconnue principale et d'inconnue auxiliaire, nombre en fonction du rang. Équivalence de systèmes, et justification du fait que l'échelonnement conduit à un système équivalent.
- **Échelonnement et inversibilité.** Équivalence entre : matrice inversible de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, son rang valant n, son échelonnée réduite est I_n et tout système associé est de CRAMER. Nouvelles méthodes de calcul de l'inverse : miroir et résolution d'un système associé.
- **Matrice $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n$.** Remarques générales sur les opérations autorisées pour gérer l'échelonnement d'un système ou matrice à paramètre. Recherche des λ tels que $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n$ ne soit pas inversible sur plusieurs exemples : matrice 2×2 et 3×3.

2. [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES

- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers $\pm\infty$ par majoration/-minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'EULER. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$.
- **Informatique.** Fonctions permettant de :
  - calculer un terme donné d'une suite,
  - calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois,
  - de construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée,
  - tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites récurrentes : que des exercices guidés avec questions intermédiaires. Poser « étudier telle suite récurrente » sans questions intermédiaires n'est pas dans l'esprit du programme (sauf si la récurrence est usuelle bien sûr).
- Au sujet des suites implicites : l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Trouver, selon deux méthodes (échelonnement et déterminant), les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2$ ne soit pas inversible lorsque $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$.

2. Trouver, par échelonnement, les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible lorsque $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. *(Réponse : $\lambda = \pm 3$)*

3. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Écrire la définition (avec accolades) de $\bigcap\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, et rappeler les lois de MORGAN.

4. Soit E un ensemble. Donner la définition de *partition* $(A_i)_{i\in I}$ de E, puis la formule sur $\mathrm{Card}(A \cup B)$ avec $A, B \subset E$.

5. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Donner le nombre de p-listes, et le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n. Justifier ces deux formules.

6. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Donner le nombre de p-combinaisons d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n, et le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n. Déduire le nombre d'anagrammes de CHEVAL et ANANAS.

7. On considère la suite (u_n), définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Rappeler, en invoquant une autre question de cours, la valeur de $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$. Écrire une fonction d'en-tête `liste_seuil(a, eps)` qui renvoie la liste des termes $[u_1, \dots, u_n]$ jusqu'à ce que $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

8. On considère la suite (v_n), définie par :

$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + e^{v_n}. \end{cases}$$

Écrire une fonction d'en-tête `terme_v(a, n)` qui renvoie la valeur de v_n.

9. On considère la suite (w_n), définie par :

$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n + w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$

Écrire une fonction d'en-tête `terme_w(a, b, n)` qui renvoie la valeur de w_n.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : dénombrement et le début des proba.