Chapitre (ALG) 8 — Compléments sur les ensembles, Dénombrement

Résumé & Plan

Notre objectif est ici purement pratique — celui d'apprendre à compter des objets. Nous omettrons pour cette raison la plupart des démonstrations de ce chapitre, souvent difficiles.

Un être humain possède environ 150 000 cheveux (en tout cas, moins d'un million). Comme la ville de Paris compte 2,141 millions d'habitants, d'après le principe des tiroirs de DIRICHLET, *il existe au moins deux personnes à Paris qui ont exactement le même nombre de cheveux.*

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES

On peut généraliser la notion d'intersection et de réunion à des familles quelconques d'ensembles. Rappelons tout d'abord les définitions déjà connues depuis le Chapitre (ALG) 1.

1.1. Rappels

Si E est un ensemble et A, B deux parties de E, alors on définit :

$$A\cup B=\left\{x\in E \,\middle|\, x\in A \ \underline{\textbf{ou}}\ x\in B\right\},\qquad A\cap B=\left\{x\in E \,\middle|\, x\in A \ \underline{\textbf{et}}\ x\in B\right\}.$$

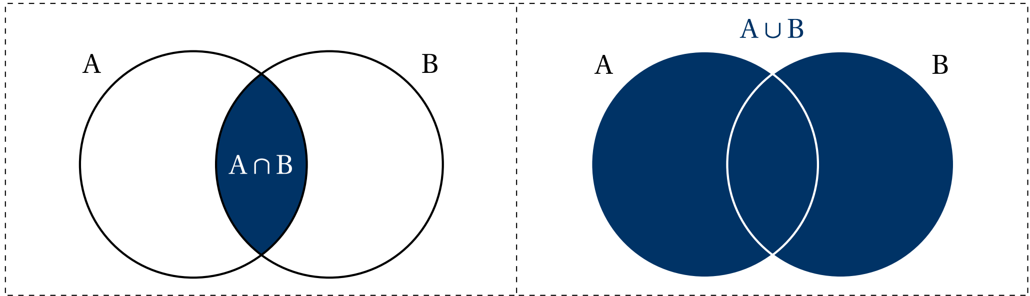
Le complémentaire de A dans E est défini par :

$$\overline{A}=\{x\in E \mid x\notin A\}.$$

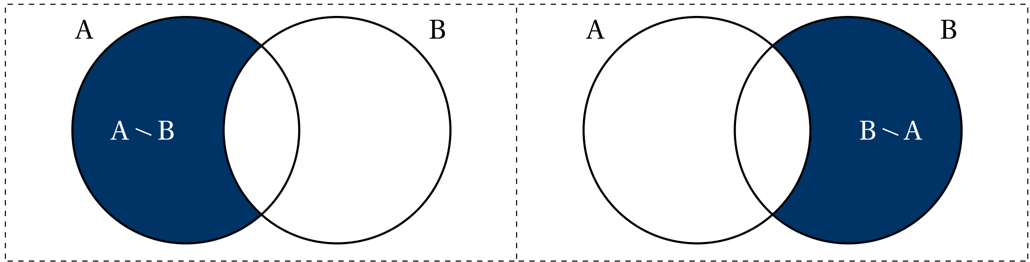
L'ensemble B *privé de* A, noté $B\setminus A$, est défini par :

$$B\setminus A=B\cap\overline{A}=\{x\in E \mid x\in B,\ x\notin A\}.$$

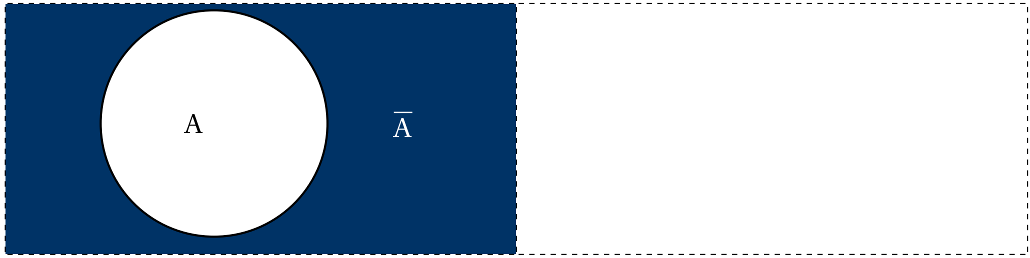
RÉUNION ET INTERSECTION SUR UN DIAGRAMME



COMPLÉMENTAIRE SUR UN DIAGRAMME



Complémentaire sur un diagramme



On rappelle également qu'un ensemble peut être défini en extension, que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments, et qu'on montre l'égalité de deux ensembles généralement par double inclusion (ou parfois par équivalence directement lorsque cela est possible).

Exemple 1 **(Méthodologie sur les ensembles)** Soient A et B deux ensembles, on a alors :

$$\textbf{(i)} \quad A \subset B \iff \textbf{(ii)} \quad A \cup B = B \iff \textbf{(iii)} \quad A \cap B = A.$$

- $\boxed{\textbf{(i)} \implies \textbf{(ii)}}$

- $\boxed{\textbf{(ii)} \implies \textbf{(iii)}}$

- $\boxed{\textbf{(iii)} \implies \textbf{(i)}}$

1.2. Généralisation de l'intersection & réunion

Définition 1 | Réunion & Intersection
Soit E un ensemble, I un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors on définit :

- l'*union des* A_i, $i \in I$, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$ (et lue « réunion des A_i ») par :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\},$$
et on a : $\quad x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I, \quad x \in A_i.$
- L'*intersection des* A_i, $i \in I$, notée $\bigcap_{i\in I} A_i$ (et lue « intersection des A_i ») par :
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\},$$
et on a : $\quad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I, \quad x \in A_i.$

Le plus souvent, l'ensemble I aura la forme :

- $I = [\![1\,,\,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^\star$, on note plutôt $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
- $I = [\![n\,,\,\infty[\![$, $n \in \mathbb{N}$, on note plutôt $\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ et $\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$. Ce type d'ensemble apparaitra souvent en 2ème année lorsque les probabilités seront étudiées sur des univers non nécessairement finis.
- $I = [\![n\,,\,m[\![$, $m \geqslant n \in \mathbb{N}$, on note plutôt $\bigcup_{i=n}^{m} A_i$ et $\bigcap_{i=n}^{m} A_i$.

Exemple 2 Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $A_i = [\![i\,,\,2i]\!]$.

1. Expliciter les ensembles A_0, A_1, A_2 et A_3.

2. On pose $I = \{2, 3, 4\}$, expliciter $\bigcap_{i\in I} A_i$.

3. Expliciter $\bigcap_{i=5}^{8} A_i$.

Exemple 3 On lance 100 fois un dé et note E l'ensemble de tous les tirages possibles, c'est-à-dire $E = [\![1\,,\,6]\!]^{100}$. Afin de ne pas alourdir la rédaction, on dira simplement « le $i^{\text{ème}}$ lancer est pair » au lieu de « le résultat du $i^{\text{ème}}$ lancer est un nombre pair ».
Pour tout $i \in [\![1, 100]\!]$, on note P_i l'ensemble de tous les tirages dont le $i^{\text{ème}}$ lancer est pair, I_i l'ensemble de tous les tirages dont le $i^{\text{ème}}$ lancer est impair.
Écrire à l'aide des familles $(P_i)_{i\in[\![1\,,\,100]\!]}$ et $(I_i)_{i\in[\![1\,,\,100]\!]}$ les ensembles ci-après :

1. L'ensemble de tous les tirages dont le 1^{er} et le $9^{\text{ème}}$ lancers sont pairs et dont le $5^{\text{ème}}$ lancer est impair.

2. L'ensemble de tous les tirages dont tous les lancers sont pairs.

3. L'ensemble de tous les tirages vérifiant : soit $i \in [\![1\,,\,100]\!]$, si i est pair alors le $i^{\text{ème}}$ lancer est impair, si i est impair alors le $i^{\text{ème}}$ lancer est pair.

Ces nouvelles définitions jouissent globalement des mêmes propriétés que celles déjà vues, que nous admettons.

Proposition 1 | Règles opératoires

Soit E un ensemble, I un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors :

- $\forall j \in I, \quad \bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j, \quad A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i.$ *(Autrement dit : l'intersection est incluse dans l'une des parties, et la réunion de parties contient n'importe laquelle des parties qui la compose.)*
- **[Distributivité]** Pour toute partie $A \subset E$, on a :
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i).$$

Enfin, on peut généraliser sans difficulté les lois de MORGAN déjà rencontrées.

Théorème 1 | Lois de MORGAN

Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E, alors :
$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Preuve Montrons uniquement la formule pour la réunion, l'intersection se prouve de la même manière. Soit $x \in E$, alors :
$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} &\iff \textbf{non}\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff \textbf{non}\ (\exists i \in I, \quad x \in A_i) \\ &\iff \forall i \in I, \quad x \notin A_i \\ &\iff \forall i \in I, \quad x \in \overline{A_i} \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

1.3. Partition

Enfin, on continue avec une notion qui nous sera utile plus tard dans l'année : celle de partition.

Définition 2 | Deux à deux disjoints
Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. On dit que les ensembles A_i, $i \in I$, sont *deux à deux disjoints* si :
$$\forall i,j \in I, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Remarque 1 Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties deux à deux disjointes, on a immédiatement $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$ *(Un contre-exemple est donné dans le prochain exemple)*

Exemple 4 Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on pose $A_i = [\![i\,,\,2i]\!]$.

1. On pose $I = [\![10\,,\,30]\!]$. Expliciter $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Les ensembles A_i, $i \in I$, sont-ils deux à deux disjoints ?

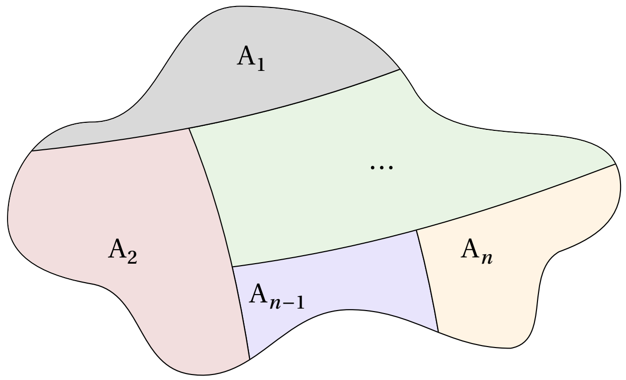
2. Mêmes questions avec $I = \{1, 3, 7, 20\}$.

Définition 3 | Partition
Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.
- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition de* E si :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \text{les } A_i \text{ sont deux-à-deux disjoints,} \\ \textbf{(ii)} & E = \bigcup_{i\in I} A_i. \end{cases}$$
- On note cela : $\quad E = \biguplus\limits_{i\in I} A_i$.

Remarque 2 (de vocabulaire) Lorsque $E = \Omega$ est un univers probabiliste, alors une partition est appelée plutôt un système complet d'évènements. Nous le verrons bientôt (Chapitre (PS) 1).

Remarque 3 Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors :
- $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I, \quad x \in A_i$,
- $x \in \biguplus\limits_{i\in I} A_i \iff \exists!\, i \in I, \quad x \in A_i$.

Il faut bien comprendre visuellement la notion de partition, c'est simplement un « découpage en morceaux qui ne se chevauchent pas » d'un ensemble. Par exemple si $I = [\![1\,,\,n]\!]$, $n \geqslant 1$:



Représentation d'une partition

Remarque 4 Rien n'interdit dans la définition d'une partition qu'une ou plusieurs des parties A_i soient vides. En pratique cependant cela sera rarement le cas.

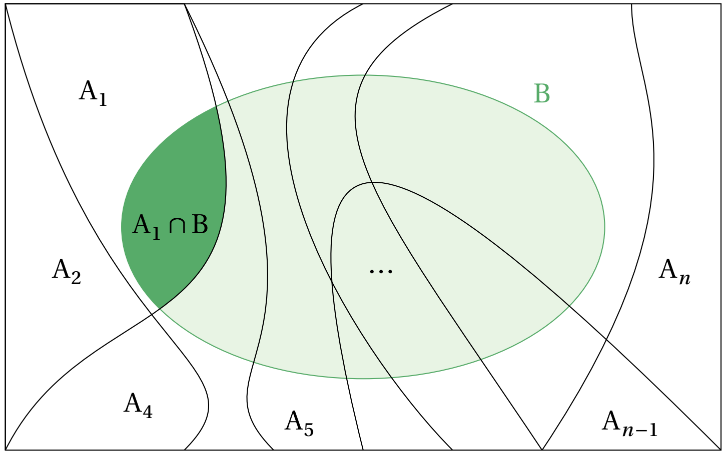
Exemple 5
- Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Alors $\left(A, \overline{A}\right)$ forme une partition de E. On l'appelle parfois la *partition triviale* de E.

- Donner plusieurs partitions simples de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Proposition 2 | Partition d'un sous-ensemble

Soit E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors :

$$\forall B\subset E,\quad (B\cap A_i)_{i\in I}\quad \text{est une partition de B.}$$



ÉCRITURE D'UN ENSEMBLE B AVEC UNE PARTITION $(A_i)_{i\in I}$ DE E

Preuve Soit $B\subset E$.

- Les $(B\cap A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints : en effet, pour tout $i\neq j$, on a :
  $$(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=B\cap A_i\cap A_j=B\cap\varnothing=\varnothing.$$
- On a de plus : $B=B\cap E=B\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)$. Alors par distributivité de l'intersection sur la réunion : $B=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$.

Ces deux points prouvent bien la proposition.

Exemple 6 Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Alors on a vu que $\left(A,\overline{A}\right)$ forme une partition de E. Ainsi :

$$\boxed{\forall B\subset E,\quad \left(B\cap A, B\cap\overline{A}\right)\quad \text{est une partition de B.}}$$

Il est utile de retenir cette partition, elle apparait souvent, aussi bien en dénombrement qu'en probabilités.

2. DÉNOMBREMENT : GÉNÉRALITÉS ET GRANDS PRINCIPES

2.1. Généralités

Définition/Proposition 1 | Ensemble fini & cardinal

- On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe une bijection entre E et $[\![1\,,\,n]\!]$.
- L'entier n est unique, et est appelé le *cardinal* de E, noté Card E. Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal zéro : $\operatorname{Card}\varnothing=0$.

Plus simplement, le cardinal d'un ensemble fini est donc son **nombre d'éléments**. Intuitivement, les éléments d'un ensemble de cardinal n peuvent être *numérotés* de 1 à n, on peut alors écrire :

$$E=\{x_1,\dots,x_n\},\qquad \text{avec des } x_i \text{ distincts.}$$

En résumé,

Montrer que E est en bijection avec $[\![1\,,\,n]\!]$	$=$	Montrer que $E=\{x_1,\dots,x_n\}$ avec $x_1,\dots,x_n$ deux à deux distincts.

Exemple 7

1. $\operatorname{Card}\{5,8,12\}=3$.
2. Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\leqslant p$. Alors : $\boxed{\operatorname{Card}\left([\![n\,,\,p]\!]\right)=p-n+1.}$ C'est donc la différence des deux $\boxed{+1}$. Montrons cela *(uniquement cette fois)* à l'aide de la définition, c'est-à-dire trouvons une bijection $f:[\![1\,,\,p-n+1]\!]\to[\![n\,,\,p]\!]$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Déterminer le nombre de couples $(x,y)\in[\![1\,,\,n]\!]^2$ tels que $x+y=n$.

Proposition 3 | Même cardinal / en bijection

Soient E, F deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Il existe une bijection } f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F} \iff \operatorname{Card}\mathrm{E} = \operatorname{Card}\mathrm{F}.$$

Si l'on considère deux ensembles ayant même nombre d'éléments, par exemple $\mathrm{E} = \{1,2\}$ et $\mathrm{F} = \{3,4\}$, alors on peut construire une bijection entre les deux : on définit tout simplement $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ telle que $f(1) = 3, f(2) = 4$, par exemple. On montre sans difficulté qu'elle est bijective. Et en fait, cette condition est même nécessaire et suffisante.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\operatorname{Card}\mathrm{E} = \operatorname{Card}\mathrm{F} = n \in \mathbb{N}^*$, alors on peut écrire :

$$\mathrm{E} = \{e_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}, \quad \mathrm{F} = \{f_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}.$$

On définit alors une application f de E dans F de la façon suivante : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $f(e_i) = f_i$. On justifie que f est injective et surjective, c'est donc une bijection.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit f une bijection de E dans F. On pose $\mathrm{E} = \{e_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ où $n = \operatorname{Card}\mathrm{E}$. L'application f étant injective, les $f(e_i)$ sont deux à deux distincts. On en déduit que $\operatorname{Card} f(\mathrm{E}) = n = \operatorname{Card}\mathrm{E}$. L'application f étant de plus surjective, on a $\mathrm{F} = f(\mathrm{E})$ ce qui entraîne $\operatorname{Card}\mathrm{F} = n = \operatorname{Card}\mathrm{E}$.

2.2. Propriétés du cardinal

Proposition 4 | Cardinal et réunion disjointe (principe additif)

Soit E un ensemble fini.

- Soient A, B deux parties **disjointes** de E, alors :
$$\operatorname{Card}(\mathrm{A} \uplus \mathrm{B}) = \operatorname{Card}\mathrm{A} + \operatorname{Card}\mathrm{B}.$$
- Soit $(\mathrm{C}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $n \geqslant 1$ une famille de parties **deux à deux disjointes** de E, alors : $\operatorname{Card}\left(\biguplus_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\mathrm{C}_i.$
- Soit $(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ avec $n \geqslant 1$ une **partition** de E et $\mathrm{B} \subset \mathrm{E}$. Alors :
$$\operatorname{Card}\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i). \quad \text{En particulier,} \quad \operatorname{Card}\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\mathrm{A}_i.$$

Preuve

-

- Faisons une récurrence sur $n \geqslant 1$.

Initialisation. La propriété est vérifiée pour $n = 1$, puisque $\operatorname{Card}\mathrm{C}_1 = \sum_{i=1}^{1} \operatorname{Card}\mathrm{C}_i$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\mathrm{C}_i$. Montrons que $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{C}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{Card}\mathrm{C}_i$.

On a : $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{C}_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i\right) \uplus \mathrm{C}_{n+1}$. En effet :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i \cap \mathrm{C}_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{C}_i \cap \mathrm{C}_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \varnothing = \varnothing.$$

Donc en utilisant la première partie de la proposition, on déduit :

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathrm{C}_i\right) = \operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i\right) + \operatorname{Card}\mathrm{C}_{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}\mathrm{C}_i + \operatorname{Card}\mathrm{C}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{Card}\mathrm{C}_i.$$

hypothèse de récurrence

- On a déjà montré que :
$$\mathrm{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i,$$
puisque $(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i)_{i=1}^{n}$ est une partition de B. Donc en passant au cardinal (et en utilisant le point précédent), on obtient :
$$\operatorname{Card}\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_i).$$

Proposition 5 | Autres propriétés du cardinal

Soit E un ensemble fini, et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$ deux parties de E. Alors :

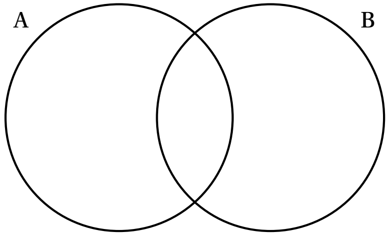
1. **[Différence]**
   - $\operatorname{Card}(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) = \operatorname{Card}(\mathrm{B}) - \operatorname{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.
   - En particulier, si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$: $\operatorname{Card}(\mathrm{B} \backslash \mathrm{A}) = \operatorname{Card}(\mathrm{B}) - \operatorname{Card}(\mathrm{A})$.
2. **[Inclusion/exclusion]**
$$\operatorname{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \operatorname{Card}(\mathrm{A}) + \operatorname{Card}(\mathrm{B}) - \operatorname{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$
3. **[Vide et ensemble total]** $\operatorname{Card}(\varnothing) = 0$, $\operatorname{Card}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \operatorname{Card}(\mathrm{A})$.
4. **[Monotonie pour ⊂]** $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow \operatorname{Card}(\mathrm{A}) \leqslant \operatorname{Card}(\mathrm{B})$.

   De plus, $\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \\ \textbf{(ii)} & \operatorname{Card}\mathrm{A} = \operatorname{Card}\mathrm{B} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}.$

Preuve

1. Découpage de B en union disjointe

L'idée de la preuve qui suit est de se « ramener » à une réunion disjointe. Commençons par un dessin : colorez les éléments d'une partition de B sur le diagramme ci-contre.

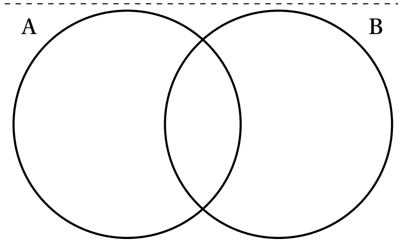


-

-

2. Découpage de $A \cup B$ en union disjointe

L'idée de la preuve qui suit est de se « ramener » à une réunion disjointe. Commençons par un dessin : colorez les éléments d'une partition de $A \cup B$ sur le diagramme ci-contre.



3.

4.

Nous admettons la seconde partie.

Exemple 8 Soient A, B, C trois parties finies d'un ensemble E. Établir une formule pour $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C)$. *(On peut généraliser encore à une union quelconque de parties, cette formule est appelée « formule du crible », elle est hors-programme.)*

Passons à présent à l'étude du produit cartésien, dont nous rappelons la définition.

Définition 4 | Produit cartésien

Soient $E_1, \dots, E_n$ une collection de n ensembles. Alors on appelle *produit cartésien de* $E_1, \dots, E_n$ l'ensemble :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \,\middle|\, \forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\quad x_i \in E_i\right\}.$$

Plus particulièrement :

- Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on note $E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$.
- Si $E_1 = \cdots = E_n = E$ et $n = 2$ (*resp.* $n = 3$) : les éléments de E^2 (*resp.* E^3) sont appelés les *couples d'éléments de* E (*resp.* les *triplets d'éléments de* E).

Exemple 9 On note $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$ avec a, b, c trois réels distincts. Calculer $E \times F$. Que vaut $\mathrm{Card}(E \times F)$?

Proposition 6 | Cardinal d'un produit cartésien.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}\,(E \times F) = \mathrm{Card}\,E \times \mathrm{Card}\,F.$$

Plus généralement, soit $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille finie d'ensembles finis. Alors,

$$E_1 \times \ldots \times E_p \text{ est fini, et :}\quad \mathrm{Card}\left(E_1 \times \ldots \times E_p\right) = \prod_{k=1}^{p} \mathrm{Card}\,E_k.$$

En particulier, si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\mathrm{Card}\,(E^p) = \mathrm{Card}\,E^p.$$

Preuve On montre la formule pour deux ensembles E, F, la formule générale s'en déduit alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 10 On suppose que l'on peut caractériser une cellule par :

- une suite de $N \in \mathbb{N}$ entiers entre -5 et 5,
- et un entier qui vaut soit 0 soit 3 : le 0 correspondant à une cellule cancéreuse, et le 3 à une cellule saine.

Combien y-a-t'il de configurations possibles ?

Combien y-a-t'il de configurations possibles pour les cellules cancéreuses ?

Conséquence de ces propriétés : principe multiplicatif et additif.

- Si on a : « Soit telle situation, soit telle autre situation **distincte** de la première » alors on additionne les nombres de possibilités correspondants à chacune des situations. C'est une conséquence de la formule :

  $$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) \quad \text{avec A et B disjoints.}$$

- Si on a : « Telle situation, puis indépendamment telle autre situation » alors on multiplie les nombres de possibilités correspondants à chacune des situations. C'est une conséquence de la formule :

  $$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

  On peut aussi voir les possibilités comme un (grand) arbre ; les choix successifs se démultipliant à chaque étape.

L'utilisation de ces principes peut se faire au moyen d'un « protocole de dénombrement », de la forme ci-dessous.

Protocole de dénombrement additif (rédaction)

Se donne un tel objet, c'est se donner :

- telle chose . . . . [n_1 choix]
- **ou** telle chose . . . . [n_2 choix]
- ⋮
- **ou** telle chose . . . . [n_p choix]

Au total : $\boxed{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}$ choix.

Protocole de dénombrement multiplicatif (rédaction)

Se donne un tel objet, c'est se donner :
- telle chose .... [n_1 choix]
- **puis** telle chose *(indépendamment du précédent)* .... [n_2 choix]
- ⋮
- **puis** telle chose *(indépendamment des précédents)* .... [n_p choix]

Au total : $\boxed{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p}$ choix.

Les deux principes peuvent bien sûr être combinés.

Attention

Dans le principe multiplicatif, il est crucial que les choix soient « indépendants » les uns des autres. Par exemple, si dans une classe de 48 élèves on s'intéresse au nombre de façons de choisir 2 délégués. Le raisonnement ci-après donnera un résultat erroné :
- on choisit le 1er délégué : 48 choix,
- **puis** on choisit le 2ème délégué : 47 choix.

Bilan : 48×47 choix. Ce résultat est faux car nous verrons plus tard que c'est $\binom{48}{2} = \frac{48 \times 47}{2}$. En fait, quand on pioche deux fois de suite dans un même ensemble, le protocole multiplicatif impose un ordre.

Exemple 11 **(7 lancers de dé)** On lance sept fois successivement un dé équilibré à six faces (numérotées par les entiers de 1 à 6). On notera E l'ensemble des issues possibles.

1. Combien cette expérience admet-elle d'issues ? c'est-à-dire calculer Card E.
   - **[Rédaction 1 : protocole]**
   - **[Rédaction 2 : reconnaitre un ensemble usuel]**
2. - Combien d'issues contiennent au premier résultat un entier impair ? On notera I_1 ces issues.
   - Même question avec un entier pair. On notera P_1 ces issues.
   - Retrouver Card(E).
3. Combien d'issues contiennent au moins un cinq **ou** au moins un six ?

Résumé Techniques de dénombrement

« On a Soit ceci, Soit cela »	=	Addition (c'est-à-dire partition de l'ensemble)
« On fait ceci, Puis cela »	=	Multiplication

3. DÉNOMBREMENT : CONTEXTES USUELS

3.1. Comptage d'applications

Proposition 7 | Nombre d'applications Soient E et F deux ensembles finis, de cardinaux non nuls. Alors l'ensemble $\mathrm{F}^{\mathrm{E}} = \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ des applications de E dans F est fini et :

$$\operatorname{Card}\left(\mathrm{F}^{\mathrm{E}}\right) = (\operatorname{Card}\mathrm{F})^{\operatorname{Card}\mathrm{E}}.$$

Cela légitime *a posteriori* la notation F^{E} pour ces applications.

Preuve Soit n le cardinal de E, p le cardinal de F et notons :

$\mathrm{E} = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad \mathrm{F} = \{y_1, \dots, y_p\}.$

Exemple 12 **(Rangement de boules discernables dans des tiroirs)** On considère 5 boules discernables que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles.

3.2. Comptage de choix de p objets dans un ensemble

La plupart des exercices de dénombrement peuvent se ramener au cas de tirages de p éléments parmi les n éléments d'un ensemble E. Il y a alors essentiellement quatre façons différentes de sélectionner p éléments parmi n :

- avec ordre et doublons possibles (les p-listes d'éléments quelconques dans la suite),
- avec ordre et sans doublon (les p-listes d'éléments distincts dans la suite),
- sans ordre et sans répétition (les p-combinaisons d'éléments distincts dans la suite),
- sans ordre et avec répétition (les p-combinaisons d'éléments quelconques dans la suite).

La présence d'un ordre ou pas sera fixée par le choix de l'objet mathématique :

- des uplets pour les éléments ordonnés ($(1,2) \neq (2,1)$),
- et des ensembles pour les éléments non ordonnés ($\{1,2\} = \{2,1\}$).

3.2.1. Choix de p objets en tenant compte de l'ordre

Définition 5 | p-listes
Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *p-uplet* ou *p-liste* d'éléments de E tout élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p.

Attention
Par exemple pour $p = 2$, $(x_1, x_2) \neq (x_2, x_1)$ dès que $x_1 \neq x_2$. Ainsi, on tient compte de l'ordre des éléments pour les p-listes.

Exemple 13
1. Lister toutes les 2-listes de $E = \{a, b, c\}$ avec a, b, c trois réels distincts.

2. Même question avec les 2-listes d'éléments distincts.

Puisque l'ensemble des p-liste est simplement un cas particulier de produit cartésien, la proposition ci-après est déjà démontrée.

Proposition 8 | Nombre de p-listes
Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est : *(donc ici on autorise a priori que des éléments soient égaux)*

$$\mathrm{Card}\,(E^p) = (\mathrm{Card}\,E)^p = n^p.$$

Remarque 5 (Interprétation probabiliste) Il y a n^p tirages possibles, **avec ordre et avec remise**, de p objets dans un ensemble de n objets.

Preuve
- On utilise le résultat déjà établi sur le cardinal d'un produit cartésien.
$$\mathrm{Card}(E^p) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Card}\,E = \prod_{i=1}^{p} n = n^p.$$
- On peut aussi refaire la démarche complète.

Exemple 14 En ne supposant aucune contrainte sur les séries de chiffres, combien de numéros de cartes bancaires existe-t-il ? Et de codes d'identification ?

Exemple 15 Montrer que dans tout village de 677 habitants ou plus, au moins deux personnes ont les mêmes initiales.

On peut maintenant également se poser la question de la recherche du cardinal de ces mêmes listes, mais lorsque tous les éléments sont distincts.

Proposition 9 | Nombre de p-listes d'éléments $\neq$ (p-arrangements)
Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments **distincts** de E, appelé aussi *nombre de p-arrangements* de E, est :

$$A_n^p \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } \ p > n, \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } \ p \leqslant n. \end{cases}$$

Remarque 6 **(Interprétation probabiliste)** Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ tirages possibles, **avec ordre et sans remise**, de p objets dans un ensemble de n objets lorsque $p \leqslant n$, 0 sinon.

Preuve Le résultat est évident dans le premier cas. Supposons $p \leqslant n$. Procédons par protocole.

Exemple 16 Combien de mots de 4 lettres deux à deux distinctes peut-on former avec l'alphabet classique ?

Cas particulier $n = p$: le nombre de permutations d'un ensemble fini.

Définition 6 | Permutation
On appelle *permutation* d'un ensemble fini E de cardinal n toute n-liste d'éléments distincts.

C'est donc une liste de E contenant tous les éléments en un seul exemplaire.

Exemple 17 On note $E = \{a, b, c\}$ avec a, b, c trois réels distincts. Alors (b, a, c) est une permutation de E. Lister toutes les permutations.

Corollaire 1 | Nombre de permutations
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de permutations de E est :
$$A_n^n = n!.$$

Remarque 7 **(Interprétation probabiliste)** Il y a $n!$ tirages possibles, **avec ordre et sans remise**, de tous les objets d'un ensemble de n objets.

Preuve Par définition d'une permutation, le cardinal cherché est $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$. On peut aussi refaire le raisonnement dans ce cas particulier.

Exemple 18

- Si une classe est constituée de 48 étudiants et si la salle de classe comporte exactement 48 places assises, alors il y a 48! dispositions différentes possibles, soit environ 12.10^{60}.
- Combien de mots de 4 lettres deux à deux distinctes peut-on former avec l'alphabet $\{a, b, c, d\}$?

Exemple 19 De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ?

3.2.2. Choix de p objets sans tenir compte de l'ordre

Définition 7 | p-combinaison

Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$. On appelle *p-combinaison* (ou p-ensemble) d'éléments de E, toute partie $\left\{x_1, \dots, x_p\right\}$ de E de cardinal p.

Attention

Par exemple pour $p = 2$, $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$. Ainsi, on ne tient pas compte de l'ordre des éléments pour les p-combinaisons.

Exemple 20 Lister toutes les 2-combinaisons d'éléments de $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$ avec a, b, c trois réels distincts.

Cas d'éléments distincts.

Proposition 10 | Nombre de p-combinaisons

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-combinaisons d'éléments **distincts** de E est :

$$\binom{n}{p} \underset{\textbf{(nota.)}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > n, \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si} \quad p \leqslant n. \end{cases}$$

$$\underset{\textbf{(nota.)}}{=} \mathrm{C}_n^p \quad \text{(autre notation)}$$

Remarque 8 **(Interprétation probabiliste)** Il y a $\binom{n}{p}$ tirages possibles, **sans ordre et sans remise**, de p objets dans un ensemble de n objets. C'est en particulier le cas quand les tirages sont réalisés simultanément.

Preuve

- Si $p > n$, il n'existe pas de sous-ensemble de E à p éléments et on a bien $\binom{n}{p} = 0$.
- Si $p = 0$, il existe un unique sous-ensemble de E à 0 élément : l'ensemble vide, on a bien $\binom{n}{0} = 1$.
- Si $1 \leqslant p \leqslant n$, on pose $\mathrm{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$. La formule fait apparaître A_n^p ; on va essayer de redémontrer la formule de A_n^p mais avec un protocole différent.

Exemple 21 **(Délégués)** Dans une classe de 48 élèves, combien y'-a-t'il de résultats possibles dans l'élection des deux délégués ?

Exemple 22 **(Loto)** Remplir une grille de loto consiste à cocher 5 cases parmi 49. Le nombre de combinaisons possibles est donc $\binom{49}{5} = 1\,906\,884$, dont une seule est gagnante. Au loto, on ne tient par compte de l'ordre des éléments.

Une partie de l'exemple qui suit, très classique, utilise plutôt des permutations.

Exemple 23 **(Anagrammes d'un mot)** On appelle *anagramme d'un mot* toute permutation de l'ensemble des lettres. Dans la pratique, il faut bien distinguer deux cas, puisque certaines permutations peuvent donner *in fine* le même mot, il ne faut donc pas le compter deux fois !

1. **[Cas de lettres distinctes]** quel est le nombre d'anagrammes du mot CHEVAL ?

2. **[Cas de lettres répétées]** quel est le nombre d'anagrammes du mot ANANAS ?

Exemple 24 **(7 lancers de dé)** On reprend l'Exemple 11. Combien d'issues contiennent exactement 6 valeurs identiques ? On peut raisonner ici à l'aide d'un protocole.

Le nombre de p-combinaisons est inférieur au nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments. [1]

ELÉMENTS QUELCONQUES. Ce cas là est plus rare mais il apparaît parfois. Rappelons que nous avons traité l'exemple ci-dessous mais avec des boules discernables.

Exemple 25 **(Rangement de boules indiscernables dans des tiroirs)** On considère 5 boules indiscernables *(Le cas de boules indiscernables est plus complexe que le cas discernable, car on peut avoir trois boules dans le 1er tiroir via plusieurs configurations (mettre les deux premières que l'on choisit, ou la 1ère et la dernière que l'on choisit par exemple...).)* que l'on veut placer dans 3 tiroirs distincts, chaque tiroir pouvant contenir de 0 à 5 boules. Donner le nombre de répartitions possibles. Dessinons une configuration.

1. Ceci est tout à fait cohérent avec l'intuition, si on tient compte de l'ordre, il y a plus de possibilités.

Cela revient donc à compter le nombre de façons de poser les 5 (boules) + 2 (cloisons internes) = 7 objets. On imagine alors qu'il y a 7 emplacements à remplir, donc le nombre de configurations est le nombre de choix pour les cloisons (*cf.* des boules, cela mènera au même résultat), soient $\binom{7}{2}$ configurations possibles. En effet, il faut faire ces choix de manière non répétée (on ne met pas deux objets au même endroit) et puisque les cloisons (*cf.* boules) sont identiques, on ne tient pas compte de l'ordre des emplacements.
Quelle analogie avec un précédent problème peut-on faire ?

3.3. Comptage de choix d'objets dans un ensemble (sans ordre)

Dans cette dernière partie, on choisit un nombre quelconque d'objets (l'entier p précédent est donc quelconque) dans un ensemble et sans ordre. Cela revient à compter le nombre de parties d'un ensemble E. Rappelons déjà ce que c'est.

Définition 8 | Ensemble des parties
Soit E un ensemble. L'*ensemble des parties de* E, noté $\mathscr{P}(E)$, est l'ensemble des sous-ensembles de E.

On a donc : $\boxed{A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E.}$

Attention **Appartenance ≠ Inclusion !**
Un **élément appartient** à un ensemble, et une **partie est incluse** dans un ensemble.

Proposition 11 | Cas du vide et de E
Soit E un ensemble. Alors : $E \in \mathscr{P}(E)$, et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Preuve
-
-

Exemple 26 Soit $E = \{1,2,3\}$, alors :

$$\mathscr{P}(E) = \{ \underbrace{\varnothing}_{0 \text{ elément}}, \underbrace{\{1\},\{2\},\{3\}}_{1 \text{ élement}}, \underbrace{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}}_{2 \text{ éléments}}, \underbrace{E}_{3 \text{ éléments}} \}.$$

On écrit en général l'ensemble des parties comme précédemment ; c'est-à-dire par cardinal croissant, on est alors sûr de n'oublier personne.

Exemple 27 Soit $E = \{1,2,3,4\}$ un ensemble à 4 éléments.
1. Lister toutes les parties de E.
   - **[0 élément]**
   - **[1 élément]**
   - **[2 éléments]**
   - **[3 éléments]**
   - **[4 éléments]**
2. Combien l'ensemble E admet-il de parties ?

Plus généralement, nous avons la propriété suivante.

Proposition 12 | Cardinal de l'ensemble des parties
Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E est fini et :
$$\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}.$$

Preuve
- **[Méthode par protocole multiplicatif]**

- **[Méthode par protocole additif (partition)]** Notons $\mathscr{P}_k(\mathrm{E})$ les parties de E à k éléments, avec $k \in [\![0\,,\,n]\!]$.

- **[Méthode avec indicatrice]** Considérons l'application $\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathrm{E}} \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \mathbb{1}_{\mathrm{A}}. \end{array} \right.$

  Montrons que Φ est une bijection.
  - ⋄ Φ est injective. En effet, soient $\mathrm{A}, \mathrm{A}' \subset \mathrm{E}$ tels que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}'}$. Alors :
  $$\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid \mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1\} \underset{\mathbb{1}_{\mathrm{A}} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}'}}{=} \{x \in \mathrm{E} \mid \mathbb{1}_{\mathrm{A}'}(x) = 1\} = \mathrm{A}'.$$
  Donc Φ est injective.
  - ⋄ Φ est surjective. En effet, soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \{0,1\}$ une application, c'est-à-dire un élément de $\{0,1\}^{\mathrm{E}}$. On vérifie sans peine que $f = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{E} \mid f(x) = 1\}$.
  - ⋄ Conclusion : d'après la Proposition 3, $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\,\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{Card}\left(\{0,1\}^{\mathrm{E}}\right) = \mathrm{Card}\{0,1\}^{\mathrm{Card}\,\mathrm{E}} = 2^{\mathrm{Card}\,\mathrm{E}}$.

Résumé **Types d'objets que l'on compte**

Soit $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$ un ensemble avec a, b, c trois réels distincts, donc de cardinal $n = 3$. On note $p = 2$.

Type d'objet	Ensemble	Cardinal
p-listes	$(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)$	$n^p = 3^2 = 9$
p-listes d'éléments ≠	$(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)$	$\mathrm{A}_n^p = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 6$
Permutations = n-listes d'éléments ≠	$(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)$	$n! = 3! = 6$
p-combinaisons d'éléments ≠	$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$	$\dbinom{n}{p} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$
Ensemble des parties	$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$	$2^n = 2^3 = 8$

Résumé **Choix d'un cardinal usuel**

On essaie toujours de représenter un exercice à l'aide d'un objet de dénombrement du cours (application, liste, ensemble, *etc.*).

Liste ordonnée ?	Répétitions possibles ? OUI	Répétitions possibles ? NON
OUI	p-liste n^p	p-arrangement $\mathrm{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
NON		p-combinaison $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

3.4. Coefficients binomiaux, formule du binôme & dénombrement

Le but de cette section est de retrouver par des arguments de dénombrement des résultats sur les coefficients binomiaux qui avaient été établis par le calcul dans le Chapitre (ALG) 4. On rappelle systématiquement les énoncés.

Proposition 13 | Propriété des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- **[Symétrie]**
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$
- **[Formule de Pascal]**
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Preuve *(combinatoire)*

- ⋄ Si $k < 0$ ou $k > n$, on a on a déjà établi la formule dans le Chapitre (ALG) 4, la preuve reste la même en utilisant les conventions.
  - ⋄ Si $k \in [\![0, n]\!]$, remarquons qu'il revient au même de choisir k éléments parmi n, ou bien de choisir les $n-k$ éléments qu'on ne prend pas : une partie à $n-k$ éléments est le complémentaire d'une unique partie à k éléments.

  Ces deux façons de faire conduisent au même nombre de choix, c'est-à-dire $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$.
- ⋄ Si $k < 0$, $k = 0$ et $k = n$ on a déjà établi la formule dans le Chapitre (ALG) 4, la preuve

reste la même en utilisant les conventions.

- Supposons donc que $k \in [\![1, n-1]\!]$, considérons un ensemble $\mathrm{E} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ à n éléments, et tentons de dénombrer les parties de E à k éléments. Il y en a $\binom{n}{k}$. On peut classer ces parties en deux catégories :
  1. Celles qui contiennent x_n : il reste à choisir $k-1$ éléments parmi $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Il y en a $\binom{n-1}{k-1}$.
  2. Celles qui ne contiennent pas x_n : il reste à choisir k éléments parmi $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. Il y en a $\binom{n-1}{k}$.

  Toutes les parties à k éléments de E sont dans l'une de ces catégories et aucune ne se trouve dans les deux catégories à la fois (ces deux ensembles de parties sont donc des ensembles disjoints). On en déduit qu'il y a $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ parties à k éléments de E. D'où l'égalité.

Théorème 2 | Formule du binôme de Newton

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve *(combinatoire)* Il s'agit de développer $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$. On doit choisir dans chaque parenthèse un terme : a ou b. Si on choisit k fois a, on aura pris $n-k$ fois le terme b. On obtient donc $a^k b^{n-k}$. Il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k fois le terme a parmi les n facteurs $(a+b)$. En regroupant tous les termes $a^k b^{n-k}$, on obtient $\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Pas de question de cours dans ce chapitre

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les ensembles :
   - savoir décrire par extension et par compréhension un ensemble . . . . ☐
   - connaître la définition et les propriétés du produit cartésien . . . . ☐
   - connaître la définition et les propriétés de l'union et de l'intersection . . . . ☐
   - savoir ce qu'est une partition . . . . ☐
   - savoir déterminer le complémentaire d'un ensemble et ses propriétés . . . . ☐
2. Concernant le cours de dénombrement :
   - connaître les formules liées au cardinal d'un ensemble . . . . ☐
   - connaître la différence entre une permutation, une liste sans répétition et une liste avec répétition . . . . ☐
   - savoir dénombrer les différents ensembles précédents . . . . ☐
   - connaître la définition d'une combinaison . . . . ☐
   - savoir l'expression du nombre de combinaison $\binom{n}{p}$
   - connaître les formules liées aux nombres de combinaisons . . . . ☐
3. Concernant les techniques de dénombrement :
   - savoir dénombrer en construisant progressivement un objet (traduction de « puis [..] puis [..] ») . . . . ☐
   - savoir quand dénombrer à l'aide d'une partition (traduction de « ou ») . . . . ☐
   - savoir quand dénombrer à l'aide d'un complémentaire (traduction de « au plus, au moins ») . . . . ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

4.1. Ensembles

Exercice 1 | Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que : $A = B \iff A \cup B = A \cap B$.

Solution (exercice 1) On procède par double implication.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $A = B$. Montrons que $A \cup B = A \cap B$. Mais $A \cup B = A \cup A = A$, $A \cap B = A \cap A = A$, donc $A \cup B = A \cap B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $A \cap B = A \cup B$. Alors montrons que $A = B$ par double inclusion.
$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$ par hypothèse, donc $x \in A$ et $x \in B$. En particulier, $x \in B$.
$\boxed{\supset}$ S'obtient de la même manière par symétrie des rôles entre A et B.
Conclusion $\boxed{A = B \iff A \cup B = A \cap B.}$

Exercice 2 | Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que : $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

Solution (exercice 2) On doit montrer une équivalence, on raisonne donc par double implication.
- On commence par exemple par supposer que $B \subset A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$. Comme $B \subset A$, on a : $A \cup B = A$ (faire un dessin pour le voir). De même, comme $A \subset C$, on a : $A \cap C = A$. Ainsi, on a : $A \cup B = A = A \cap C$. Ainsi on a montré l'implication directe.
- On suppose alors que $A \cup B = A \cap C$. Montrons que $B \subset A \subset C$:
  - On montre d'abord que $B \subset A$: Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in A$. On a bien montré que $B \subset A$.
  - On montre ensuite que $A \subset C$: Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in C$. On a bien montré que $A \subset C$.

  Ainsi on a montré que $B \subset A \subset C$ et on a démontré l'implication réciproque.

Par double implication, on a bien montré que $\boxed{(A \cup B = A \cap C) \iff B \subset A \subset C.}$.

Exercice 3 | Soit E un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C, \quad A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.

Solution (exercice 3) Soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C$.
On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin C$. On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ **ou** $A \cup B \neq A \cup C$. On doit étudier deux cas :
- Si $x \in A$: on a alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Donc : $A \cap B \neq A \cap C$.
- Soit $x \notin A$: on a alors $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$. Donc : $A \cup B \neq A \cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A \cap B \neq A \cap C$ **ou** $A \cup B \neq A \cup C$.
Par contraposée, on a donc montré que :
$\boxed{(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \implies B = C}$.

4.2. Dénombrement

Exercice 4 | Combien le mot BCPST possède-t-il d'anagrammes distinctes? Le mot CONFINEMENT?

Solution (exercice 4) Dans le mot BCPST, il y a 5 lettres distinctes. Ainsi, un anagramme s'identifie à une permutation d'un ensemble à 5 éléments, il y a donc $\boxed{5! \text{ anagrammes.}}$
Pour le mot CONFINEMENT, on a des lettres identiques donc on place les lettres une par une. On a $\binom{11}{3}$ emplacements pour les N, puis $\binom{8}{2}$ emplacements pour les E (on choisit des combinaisons puisque l'ordre n'importe pas pour ces lettres identiques et on ne peut pas mettre deux lettres dans le même emplacement) et enfin 6! possibilités pour les lettres distinctes restantes, soit au total :
$\boxed{\binom{11}{3} \times \binom{8}{2} \times 6! \text{ anagrammes.}}$

Exercice 5 | À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles de 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

Solution (exercice 5) On a forcément 5 filles et 5 garçons dans le classement final. Il y a $\binom{70}{5}$ possibilités pour les 5 garçons sélectionnés et $\binom{90}{5}$ possibilités pour les 5 filles. Une fois les 10 candidats choisis, on regarde le nombre de façon de les classer : 10 pour le premier, 9 pour le second etc.... donc 10! possibilité.
Finalement on a $\binom{70}{5} \times \binom{90}{5} \times 10!$ possibilités.

Exercice 6 | Le bureau d'une association de 10 personnes, dont 6 femmes, est constitué d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire. Le cumul de fonction est exclu.

1. Déterminer le nombre de bureaux possibles.
2. Combien de bureaux peut-on former sachant que le président est un homme et le secrétaire une femme?

3. Combien de bureaux exclusivement féminins peut-on former?
4. Combien de bureaux mixtes peut-on former? (c'est-à-dire non-exclusivement féminin ou masculin).
5. Combien de bureaux peut-on former sachant que Mme X refuse de siéger avec Mr Y?

Solution (exercice 6)

1. Il y a de l'ordre (on veut en effet savoir qui est président, qui est secrétaire et qui est trésorier) et pas de répétition possible (car il n'y a pas de cumul possible) donc un résultat est une 3-liste sans répétition parmi les 10 personnes. Ainsi, il y a $\frac{10!}{(10-3)!} = \boxed{10\times 9\times 8}$ bureaux possibles. Ou on peut aussi le voir en disant qu'il y a 10 choix pour le président et à chaque choix de président, il y a 9 choix pour la secrétaire... On retrouve ainsi $10\times 9\times 8$.
2. C'est la même idée que la question précédente : il y a 4 choix possibles pour le président et à chaque choix fait, il y a 6 choix possibles pour la secrétaire et lorsque ces deux choix sont faits, il y a 8 choix possibles pour le trésorier. Par choix successifs, il y a $\boxed{4\times 6\times 8}$ bureaux différents.
3. Même idée : $\boxed{\frac{6!}{(6-3)!} = 6\times 5\times 4}$.
4. Pour que les hommes et les femmes soient présents, on a deux choix possibles : soit le bureau est constitué de deux hommes et une femme, soit de deux femmes et un homme. Si on note A l'ensemble des bureaux avec deux hommes et une femme et B l'ensemble des bureaux avec deux femmes et un homme alors ces deux ensembles sont disjoints et : $E = A\cup B$ avec E l'ensemble des bureaux où les hommes et les femmes sont présents. Comme les deux ensembles sont disjoints, on a : $\operatorname{Card}E = \operatorname{Card}A + \operatorname{Card}B$. De plus, $\operatorname{Card}A = \binom{3}{1}\times 6\times 4\times 3$: je fais le choix de la fonction de la femme donc $\binom{3}{1} = 3$ possibilités puis j'ai 6 choix de femmes différents possibles pour la fonction choisie. Ensuite je fais le choix des 2 hommes. Le même raisonnement donne $\operatorname{Card}B = \binom{3}{1}\times 4\times 6\times 5$. Ainsi on obtient que $\boxed{\operatorname{Card}E = \binom{3}{1}\times 6\times 4\times 3 + \binom{3}{1}\times 4\times 6\times 5 = 576}$.
5. Soit F l'ensemble des bureaux que l'on peut former sachant que Mme X refuse de siéger avec M.Y On a : $E = A\cup B\cup C$ avec A ensemble des bureaux où Mme X siège et M.Y ne siège pas, B ensemble des bureaux où M.Y siège et pas Mme X et C l'ensemble des bureaux où aucun des deux ne siège. Ces trois ensembles sont disjoints et on obtient donc : $\operatorname{Card}E = \operatorname{Card}A + \operatorname{Card}B + \operatorname{Card}C = \boxed{3\times 8\times 7 + 3\times 8\times 7 + 8\times 7\times 6}$. Le 3 s'explique car il faut faire le choix de la fonction de Mme X ou de M.Y selon les cas.

Exercice 7 | On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques?
2. on met au plus un prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents?
3. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont tous différents?
4. on met un nombre quelconque de prospectus dans chaque boîte aux lettres et les prospectus sont identiques?

Solution (exercice 7)

1. Comme les prospectus sont tous identiques, l'ordre dans lequel on les distribue dans les boîtes n'intervient pas. De plus, comme les boîtes ne peuvent pas contenir plus d'un prospectus, il n'y a pas de répétition possible. Ainsi, on doit compter le nombre de combinaisons de 7 boîtes parmi 10, il y a $\boxed{\binom{10}{7}}$ possibilités.
2. Ici les prospectus sont tous différents, ainsi l'ordre dans lequel on choisit les boîtes est important (si on distribue un prospectus rouge dans la boite 1, et un bleu dans la boite 2, ce ne sera pas la même distribution que si on fait l'inverse). De plus, comme chaque boîte ne peut pas en recevoir plus d'un, il n'y a pas de répétition possible. Il s'agit donc de compter le nombre de 7 listes sans répétition parmi 10 boîtes. On a donc $\boxed{\frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!}}$ façons de faire.
   Comme ici l'ordre intervient, on peut aussi refaire le raisonnement, c'est aussi rapide : il y a 10 choix pour la première boîte, puis 9 choix pour la seconde, ..., puis $10-6=4$ choix possibles pour la 7-ème, donc par choix successifs, en tout $10\times 9\times \ldots\times 4 = \frac{10!}{3!}$ possibilités.
3. Ici, il y a de l'ordre (les prospectus sont différents), et répétition possible (on peut mettre plusieurs prospectus dans la même bôite). On doit compter le nombre de 7-listes parmi 10 boites, il y a donc $\boxed{10^7}$ façons de faire.
   On peut à nouveau raisonner par choix successifs : on a 10 choix possibles pour la première boite, 10 choix possibles pour la deuxième, ..., 10 choix pour la 7-ième, donc au total 10^7 façons de faire.

4. Là, on est dans un cas où il n'y a pas d'ordre : en effet, les prospectus étant tous identiques, l'ordre dans lequel on les distribue n'intervient pas. Par contre il y a de la répétition car plusieurs prospectus peuvent être mis dans la même boîte aux lettres. Ici, la seule façon de faire est de considérer les 7 prospectus et de rajouter les 9 séparations entre les 10 boîtes aux lettres. On a donc en tout 16 emplacements possibles et il faut choisir la place des 9 séparations parmi ces 16 places, sans ordre (les séparations sont identiques) et sans répétition (un seul objet par emplacement). On obtient ainsi $\boxed{\binom{16}{9}}$ façons de faire.

Exercice 8 | 👁 Un jeu de cartes non truqué comporte 52 cartes. Une main est constituée de 8 cartes.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un as ?
3. Quel est le nombre de mains possibles avec au moins un coeur ou une dame ?
4. Quel est le nombre de mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur ?
5. Quel est le nombre de mains possibles avec 8 cartes dont les rangs se suivent ?

Solution (exercice 8)

1. On est dans un cas où il n'y a pas d'ordre ni de répétition (les tirages se font de manière simultanée), on compte donc le nombre de combinaisons de 8 cartes parmi 52, on a $\boxed{\binom{52}{8}}$ mains différentes.
2. Une solution est de passer par le complémentaire. Si on pose A : ensemble des mains possibles avec au moins un as et E : ensemble des mains possibles. On obtient : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. De plus, on a : $\overline{A}$: ensemble des mains possibles sans aucun as et ainsi il s'agit de choisir 8 cartes non plus parmi 52 mais parmi 48 car on enlève les 4 as. On obtient ainsi : $\boxed{\text{Card}(A) = \binom{52}{8} - \binom{48}{8}}$.
3. Là encore on peut passer par l'ensemble complémentaire. Si on pose B : ensemble des mains possibles avec au moins (un coeur ou une dame) et E : ensemble des mains possibles. On obtient : $\text{Card}(B) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{B})$. De plus, on a : $\overline{B}$: ensemble des mains possibles sans coeur et sans dame et ainsi il s'agit de choisir 8 cartes non plus parmi 52 mais parmi 36 car on enlève les 13 coeurs et les 3 dames restantes. On obtient ainsi : $\boxed{\text{Card}(A) = \binom{52}{8} - \binom{36}{8}}$.
4. Il faut faire attention à l'as de coeur. On note C : l'ensemble des mains possibles avec exactement un as et exactement un coeur mais sans l'as de coeur, D l'ensemble des mains possibles avec l'as de coeur et aucun coeur et as pour les autres cartes et F l'ensemble des mains possibles avec exactement un as et un coeur. On a bien $F = C \cup D$ et les deux ensembles C et D sont bien disjoints. Ainsi, on obtient $\text{Card}(F) = \text{Card}(C) + \text{Card}(D)$. Le cardinal de C s'obtient en choisissant une carte parmi les 3 as ne contenant pas l'as de coeur, une carte parmi les 12 cartes de coeur sans l'as de coeur et les 6 cartes restantes parmi les 36 cartes restantes n'étant ni des coeur ni des as. On a donc : $\text{Card}(C) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{6}$. Pour D, il faut prendre l'as de coeur, soit une seule possibilité, puis il faut prendre les 7 cartes restantes parmi les 36 autres cartes n'étant ni des coeurs ni des as. On obtient ainsi $\text{Card}(D) = 1 \times \binom{36}{7}$. Ainsi, on a : $\boxed{\text{Card}(F) = \binom{3}{1}\binom{12}{1}\binom{36}{6} + \binom{36}{7}}$.
5. On commence par faire le choix de la plus petite carte : on a 6 choix pour la valeur de la plus petite carte : du 2 au 7. Une fois ce choix fait, cela détermine le choix des 8 autres valeurs puisque les valeurs doivent se suivre strictement. Par exemple, si la plus petite carte est un 4 ensuite on doit avoir un 5,6,7,8,9,10,Valet. Puis, comme il y a 4 couleurs par valeur, on obtient finalement : $\boxed{\binom{6}{1} \times 4^8}$.

Exercice 9 | 👁 Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On suppose que les boules sont discernables et on effectue un tirage de 6 boules de cette urne successivement (donc avec ordre) et avec remise.

1. Donner le nombre de résultats possibles.
2. Combien de ces résultats amènent
   - 2.1) 5 boules blanches puis une boule noire dans cet ordre ?
   - 2.2) exactement une boule noire ?
   - 2.3) au moins une boule noire ?
   - 2.4) plus de boules noires que de boules blanches ?

Solution (exercice 9)

1. On est dans un cas où il y a ordre et répétition. Un résultat est une 6-liste de boules prises dans un ensemble de 13 boules. On a donc 13 choix pour le premier tirage, 13 choix pour le second tirage... et ainsi on obtient $\boxed{13^6}$ résultats possibles.
2. 2.1) On a 5 choix possibles pour le premier tirage, 5 choix possibles pour le

second tirage, ..., puis 5 choix possibles pour le cinquième tirage et 8 choix possibles pour le dernier tirage. Au final, on obtient $\boxed{5^5 \times 8}$ résultats possibles.

2.2) Pour obtenir exactement une boule noire, on doit d'abord choisir à quel tirage on va tirer la boule noire : il y a 6 choix possibles. Ensuite pour chaque choix de numéro de tirage, on a : 8 choix possibles de boules noires et pour les 5 autres tirages, on a 5 possibilités à chaque fois (5 boules blanches). Ainsi, on obtient : $\boxed{6 \times 8 \times 5^5}$ résultats possibles.

2.3) On passe à l'ensemble complémentaire. Si on note A l'ensemble des tirages avec au moins une boule noire et E l'ensemble des tirages possibles, on a : $\text{Card}(A) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\overline{A})$. Et $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages sans aucune boule noire. On a donc $\text{Card}(\overline{A}) = 5^6$: à chaque tirage, on a 5 choix de boules (les 5 boules blanches) et il y a 6 tirages ordonnés. Ainsi, on obtient $\boxed{\text{Card}(A) = 13^6 - 5^6}$.

2.4) On considère que l'on veut strictement plus de boules noires que blanches. C'est donc la réunion disjointe de 0 boule blanche et 6 boules noires ou 1 boule blanche et 5 boules noires ou 2 boules blanches et 4 boules noires. On obtient ainsi : $\boxed{8^6 + 6 \times 5 \times 8^5 + \binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4}$.

Exercice 10 | Une urne contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. On tire deux chaussures au hasard.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages où l'on obtient deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de tirages amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de tirages amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?

Solution (exercice 10)

1. Il y a 20 chaussures en tout (on considère que toutes les chaussures sont distinctes même les chaussures de la même couleur) et on en prend 2. Il n'y a pas d'ordre ni de répétition et on a : $\boxed{\binom{20}{2}}$ tirages possibles.
2. Si on note E l'ensemble des tirages où l'on obtient deux chaussures de la même couleur, on a :
$E = E_N \cup E_M \cup E_B$ avec E_N ensemble des tirages avec 2 chaussures de la couleur noire et pareil pour E_M et E_B. Comme il y a respectivement 10 chaussures noires, 6 chaussures marrons et 4 chaussures blanches et que ces trois ensembles E_N, E_M et E_B sont des ensembles disjoints, on obtient
$$\text{Card}\, E = \text{Card}\, E_N + \text{Card}\, E_M + \text{Card}\, E_B = \boxed{\binom{10}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{2}}.$$
3. On fait le choix d'une chaussure de pied droit par exemple et à chaque choix fait, on fait le choix d'une chaussure de pied gauche. On obtient alors :
$\binom{10}{1}\binom{10}{1} = 10 \times 10 = \boxed{100}$.
4. Si on note A l'ensemble des tirages où l'on obtient deux chaussures de la même couleur avec une chaussure droite et une chaussure gauche, on a :
$A = A_N \cup A_M \cup A_B$ avec A_N ensemble des tirages avec 2 chaussures de la couleur noire avec une chaussure droite et une chaussure gauche et pareil pour A_M et A_B, soit :
$$\text{Card}(A) = \text{Card}(A_N) + \text{Card}(A_M) + \text{Card}(A_B) = \boxed{5 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 2}.$$

Exercice 11 | Soient n couples qui se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y aura-t-il de poignées de mains échangées ?

Solution (exercice 11) Il y a ici $2n$ personnes et n couples.

- **[1ère Méthode]** commençons par compter les poignées de main pour le couple 1 : on en a $2n-2$ pour chaque membre du couple donc $2(2n-2)$ pour le couples 1. Ensuite pour le couple deux, on ne reconsidère pas les poignées déjà comptées, on a donc $2(2n-4)$ — c'est simplement le résultat précédent où l'on a remplacé le nombre de couples n par $n-1$ (le couples 1 n'étant plus compté). Donc on obtient finalement
$$2(2n-2)+2(2n-4)+...+2\times 2 = 2^2((n-1)+(n-2)+\cdots+1) = 2^2\frac{n(n-1)}{2} = \boxed{2n(n-1)}.$$
- **[2ème Méthode]** on ne se préoccupe pas des poignées déjà comptées. On a alors $2(2n-2)$ poignées par couple, donc pour n couples au total $2n(2n-2)$ poignées de main. Si l'on ne souhaite pas compter deus fois chaque poignées, on divise simplement le résultat précédent par deux, d'où : $n(2n-2) = \boxed{2n(n-1)}$ au total. On retrouve le précédent.

Exercice 12 | Un tournoi de tennis comporte $2n$ joueurs. De combien de façons peut-on organiser le premier tour dans le cas où :

1. on s'intéresse à la fois aux joueurs qui sont opposés et à l'ordre des matches ;
2. on ne s'intéresse qu'à la connaissance des joueurs opposés.

Solution (exercice 12)

1. - Une façon de voir les choses est de se dire que l'on compte le nombre de façons de classer tous les joueurs : on ordonne tous les joueurs de tennis du tournoi : il y a donc de l'ordre et pas de répétition possible et on a $(2n)!$ possibilités. Ensuite pour faire les matchs, on regroupe tous les joueurs ordonnés par paire : le 1 joue contre le 2, le 3 joue contre le 4.... Ici, pour chaque match, on a compté comme 2 possibilités : Bertrand joue contre Fred et Fred joue contre Bertrand. Donc il faut diviser par 2^n car il y a n matchs. Ainsi, on obtient : $\boxed{\dfrac{(2n)!}{2^n}}$ organisations possibles du premier tour.
   - Une autre façon de voir les choses est la suivante : on choisit d'abord 2 joueurs parmi les $2n$ joueurs pour jouer le match numéro 1, puis 2 autres joueurs parmi les joueurs restants, à savoir parmi les $2n-2$ joueurs restants, puis encore 2 autres joueurs parmi les $2n-4$ joueurs restant....chaque choix de 2 joueurs parmi les joueurs restants se fait sans répétition et sans ordre car le match est le même si on commence par choisir M.X puis M.Y ou si on commence par choisir M.Y puis M.X : ainsi l'ordre n'intervient pas. Ainsi, le choix des 2 joueurs se fait sans ordre et sans répétition donc des combinaisons à 2 éléments. Finalement, on obtient
   $$\binom{2n}{2}\times\binom{2n-2}{2}\times\binom{2n-4}{2}\dots\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}.$$
   Si on écrit les coefficients binomiaux sous forme de factorielle, il y a beaucoup de simplifications et on obtient bien le même résultat, à savoir : $\dfrac{(2n)!}{2^n}$.
2. Si l'ordre des matchs n'est plus pris en compte, il faut en plus diviser par le nombre de permutations possibles des matchs, à savoir $n!$. On obtient alors $\boxed{\dfrac{(2n)!}{2^n n!}}$.

Exercice 13 | Un vendeur de fenêtres téléphone successivement à n personnes parmi une population de N individus, une même personne pouvant être appelée plusieurs fois. Dans la suite, X désignera le nom de l'une de ces personnes.

1. Combien y-a-t-il de possibilités pour que M./Mme X soit appelé k fois avec $k \in [\![0\,,\,n]\!]$?
2. Combien y-a-t-il de possibilités pour que M./Mme X soit appelé k fois au cours des r premiers appels ? avec $0 \leqslant k \leqslant r \leqslant n$.
3. Combien y-a-t-il de possibilités pour que M./Mme X soit appelé pour la k-ième fois au t-ième appel ? avec $0 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant t \leqslant n$.

Solution (exercice 13)

1. On commence par choisir les k positions des appels à M./Mme X : on doit donc choisir k places parmi les n places : $\binom{n}{k}$ choix possibles. Une fois que le choix des appels de M./Mme X est fait, pour les autres appels, on a le choix de $\mathrm{N}-1$ individus (car on ne peut pas appeler M./Mme X) et il y a de l'ordre (car dans l'énoncé il est bien indiqué « successivement » et non « simultanément ») et de la répétition. Ainsi, pour chaque appel, on a $\mathrm{N}-1$ choix et cela pour les $n-k$ appels restants. Finalement, on obtient : $\boxed{\binom{n}{k}(\mathrm{N}-1)^{n-k}}$ résultats où M./Mme X est appelé k fois.
2. On commence ici par faire le choix des k places où M./Mme X a été appelé parmi les r premiers appels, à savoir $\binom{r}{k}$. Pour les $r-k$ autres appels compris dans les r premiers appels, on ne doit plus rappeler M./Mme X et ainsi, on a $(\mathrm{N}-1)^{r-k}$ choix. Ensuite pour tous les appels après le r-ième appel, on peut faire le choix d'un individu quelconque d'où N^{n-r} choix possibles. Au final, on obtient $\boxed{\binom{r}{k}(\mathrm{N}-1)^{r-k}\mathrm{N}^{n-r}}$ résultats où M./Mme X est appelé k fois au cours des r premiers appels.
3. Il faut que M./Mme X ait été appelé $k-1$ fois au cours des $t-1$ premiers appels, puis qu'on l'appelle au t-ième appel, et ensuite qu'on appelle n'importe quel individu. En raisonnant comme précédemment, on obtient : $\binom{t-1}{k-1}(\mathrm{N}-1)^{t-k}\mathrm{N}^{n-t}$ résultats où M./Mme X est appelé pour la k-ième fois au t-ième appel.

Exercice 14 | Listes binaires sans termes consécutifs égaux Soit n un entier non nul. On désigne par :

- $\mathscr{L}_n$: l'ensemble des n-uplets composés de 0 et 1, et n'ayant pas deux 1 consécutifs.
- $\mathscr{L}_n^0$: ces mêmes listes mais finissant par zéro,
- $\mathscr{L}_n^1$: ces mêmes listes mais finissant par 1.

On note : $\quad u_n = \mathrm{Card}\,\mathscr{L}_n$.

1. Calculer $\mathscr{L}_n, \mathscr{L}_n^0, \mathscr{L}_n^1$ pour $n \in \{1,2\}$. Que dire de $\left(\mathscr{L}_n^0, \mathscr{L}_n^1\right)$?
2. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$: $\quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, préciser u_1, u_2, et en déduire u_n en fonction de n.
3. À l'aide de Python, calculer u_{20}.

Solution (exercice 14)

1. à faire
2. à faire.
3.

```python
u, v = 2, 3
for _ in range(3, 21):
    u, v = v, u+v
```

```
>>> v  # valeur de u20
17711
```

Exercice 15 | À l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier à 12 touches : 3 lettres A, B et C et les 9 chiffres autres que 0. Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie de 3 chiffres.

1. Combien existe-t-il de codes différents ?
2. Combien existe-t-il de codes
   - **2.1)** pour lesquels les 3 chiffres sont distincts ?
   - **2.2)** comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   - **2.3)** pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   - **2.4)** pour lesquels les 3 chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

Solution (exercice 15)

1. Ici, l'ordre intervient et des répétitions sont possibles. Ainsi, on obtient 3 choix pour la lettre et pour chaque lettre choisie, on obtient ensuite une 3-liste prise parmi les 9 chiffres. Ainsi le nombre de codes différents est : $\boxed{3\times 9^3}$.
2. **2.1)** Ici l'ordre intervient toujours mais il n'y a pas de répétition possible car les 3 chiffres doivent être distincts. On compte donc le nombre de 3-listes sans répétition parmi les 9 chiffres, et on obtient $\boxed{3\times(9\times 8\times 7)}$ codes différents lorsque les trois chiffres sont distincts.

   2.2) On note A l'ensemble des codes contenant au moins le chiffre 7. On a : $\mathrm{Card}(A) = 3\times 9^3 - \mathrm{Card}(\overline{A})$. Et ici, $\overline{A}$ est l'ensemble des codes ne contenant pas le chiffre 7. Ainsi, on a : $\mathrm{Card}(\overline{A}) = 3\times 8^3$ et donc $\boxed{\mathrm{Card}(A) = 3\times 9^3 - 3\times 8^3}$.

   2.3) Tous les chiffres doivent être pairs donc il s'agit de ne prendre que les chiffres 2, 4, 6 et 8. Ainsi, on obtient, comme il y a toujours de l'ordre et des répétitions possibles : $\boxed{3\times 4^3}$.

   2.4) On cherche le nombre de façons de choisir 3 chiffres parmi 9 :
   - sans ordre, puisqu'une fois les nombres choisis, l'ordre est imposé : les chiffres doivent être entrés dans l'ordre croissant (donc que l'on choisisse 1, 2 puis 3 ou 3, 2, puis 1, cela revient au même, dans tous les cas on rentrera 1, 2, 3 pour le code),
   - sans répétition, car comme l'ordre doit être strict, les nombres doivent être distincts.

   On cherche donc le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 9, on obtient donc $\binom{9}{3}$ possibilités pour les chiffres. En ajoutant les 3 choix possibles pour les lettres, on a donc $\boxed{3\times\binom{9}{3}}$ possibilités.

Exercice 16 | **Dénombrement de parties** Soit E un ensemble de cardinal $n\in\mathbb{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $B\subset A$.
   <u>Indication :</u> discuter selon le nombre d'éléments de A.
2. En déduire le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A\cap B=\emptyset$.
3. En déduire le nombre de partitions de E à 3 éléments. Retrouver ce résultat par un raisonnement direct.

Solution (exercice 16) Soit E un ensemble de cardinal $n\in\mathbb{N}^\star$.

1. Notons C l'ensemble des couples (A,B) de parties de E vérifiant $B\subset A$:
   $$C = \left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \,\middle|\, B\subset A\right\}.$$
   Il s'agit donc de calculer le cardinal de C. On commence par remarquer que si A est une partie de E fixée, il y a autant de couple $(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2$ vérifiant $B\subset A$ que de parties B de A, c'est-à-dire $2^{\mathrm{Card}(A)}$ au total. Il semble donc naturel de dénombrer C en discutant sur le nombre d'éléments de A.
   Pour tout $p\in\{0,\dots,n\}$, notons C_p l'ensemble des couples (A,B) de C tels que $\mathrm{Card}(A)=p$. On a clairement $C = C_0\cup C_1\cup\dots\cup C_n$ puisqu'une partie A de E a un cardinal compris entre 0 et n. Ensuite les C_i sont 2 à 2 disjoints : en effet, un couple (A,B) de C_i n'appartient à aucun autre C_j pour $i\neq j$ puisque $\mathrm{Card}(A) = i\neq j$. Ainsi, on obtient que
   $$\mathrm{Card}(C) = \sum_{p=0}^{n}\mathrm{Card}(C_p).$$
   Soit alors $p\in\{0,\dots,n\}$. Il y a $\binom{n}{p}$ parties A de E de cardinal p et pour chacune d'entre elles, il y a $2^{\mathrm{Card}(A)} = 2^p$ choix possibles de B vérifiant $B\subset A$ (comme on l'a vu). Par conséquent, C_p contient $\binom{n}{p}2^p$ éléments. Finalement, en utilisant

la formule du binôme de NEWTON, on a

$$\mathrm{Card}(C)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p=\boxed{3^n}.$$

2. Comme $A\cap B=\emptyset \iff B\subset\overline{A}$, il y a autant de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A\cap B=\emptyset$ que de couples (A,B) vérifiant $B\subset\overline{A}$. Le raisonnement fait ci-dessus peut être repris pour $\overline{A}$ et il y a donc $\boxed{3^n}$ couples (A,B) de parties de E vérifiant $A\cap B=\emptyset$.

3.
- Choisir une partition (A,B,C) de E à 3 éléments revient à choisir un couple (A,B) tel que $A\cap B=\emptyset$. En effet, on n'a alors plus le choix pour C : il faut prendre $C=\overline{A\cup B}$. La réponse est donc une nouvelle fois $\boxed{3^n}$.
- Retrouvons ce résultat par un raisonnement plus direct. Choisir une répartition de E, c'est regrouper les éléments de E en 3 paquets différents ordonnés que l'on numérote par exemple a, b, c. Il s'agit donc de répartir n éléments distincts (les éléments de E) dans les 3 boîtes a,b et c, chaque boîte pouvant contenir 0, un ou plusieurs éléments. On est donc dans un cadre de répartition de n éléments distincts dans 3 boîtes distinctes avec répétition possible. On retrouve bien 3^n.

Remarque : On a considéré ici les partitions comme une liste de 3 parties et donc avec un ordre : en clair la partition $(\emptyset,\emptyset,E)$ est différente de la partition $(E,\emptyset,\emptyset)$. Si on avait choisi de voir une partition comme la donnée de 3 parties $\{A,B,C\}$ (c'est-à-dire sans tenir compte de l'ordre) 2 à 2 disjointes et recouvrant E, il y en a moins. Plus précisément, on a comptabilisé $3!=6$ fois le même partage lorsque l'ordre compte (nombre de façons de permuter ces 3 parties). C'est tout le temps le cas sauf quand deux d'entre elles sont vides et l'autre vaut E, auquel cas on seulement comptabilisé trois fois : $(E,\emptyset,\emptyset)$, $(\emptyset,\emptyset,E)$ et $(\emptyset,E,\emptyset)$ alors que cela correspond au même partage $\{\emptyset,\emptyset,E\}$. Dans ce cas, il y aurait donc

$$\frac{3^n-3}{3!}+1=\frac{3^{n-1}+1}{2}$$

façons de partager E en trois.

Exercice 17 | **Formule de VANDERMONDE** Soient $a,b,n\in\mathbb{N}^3$. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement de dénombrement, que :

$$\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Solution (exercice 17) On pose $E=[\![1,a+b]\!]$, $E_1=[\![1,a]\!]$ et $E_2=[\![a+1,a+b]\!]$. (E_1,E_2) est une partition de E et on a :

$$\mathrm{Card}\,E=a+b,\quad \mathrm{Card}\,E_1=a,\qquad \mathrm{Card}\,E_2=b.$$

L'entier $\binom{a+b}{n}$ est alors le nombre de sous-ensembles de E à n éléments.

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on note p_k le nombre de sous-ensembles de E à n éléments dont exactement k éléments appartiennent à E_1, les $n-k$ éléments restants appartenant alors à E_2. On a immédiatement :

$$\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}p_k.\qquad (\star)$$

Enfin, pour construire un sous-ensemble de E dont exactement k éléments sont dans E_1 il faut :

- choisir k éléments dans E_1 soit $\binom{\mathrm{Card}\,E_1}{k}=\binom{a}{k}$ possibilités,
- choisir $n-k$ éléments dans E_2 soit $\binom{\mathrm{Card}\,E_2}{n-k}=\binom{b}{n-k}$ possibilités.

On a donc $p_k=\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ et on obtient la formule en reportant ceci dans $(\star)$.

Donc : $\boxed{\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}$.

Exercice 18 | **Chemins le long d'un quadrillage** On considère un quadrillage $\mathbb{N}^2$ du quart de plan des points à coordonnées positives. On appelle chemin croissant tout parcours suivant le quadrillage en utilisant des déplacements vers le haut ou vers la droite.

1. Combien y-a-t-il de chemins croissants de longueur $n\in\mathbb{N}$? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre?

2. Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ fixé.

2.1) Combien de chemins croissants permettent de relier $A\binom{0}{0}$ et $B\binom{m}{n}$?

2.2) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant m+n$. Pour tout $k \in \{0,\dots,p\}$, dénombrer le nombre de chemins reliant A et B et passant par $C_k\begin{pmatrix} k \\ p-k \end{pmatrix}$. Retrouver la formule de VANDERMONDE.

Solution (exercice 18)

1. Vous pouvez commencer par faire un exemple ($n = 5$) pour comprendre comment cela fonctionne.
   - A chaque déplacement, il y a deux choix possibles : soit vers la droite, soit vers le haut. Ainsi, un chemin croissant est une succession de déplacements de type d (vers la droite) et de type h (vers le haut). L'ordre intervient car le chemin n'est pas le même si on a commencé par se déplacer vers la droite puis vers le haut ou si on a fait l'inverse. De plus, il y a répétition possible car on peut bien entendu se déplacer plusieurs fois vers le haut et plusieurs fois vers la droite. Ainsi, un chemin croissant de longueur n est un n-uplet d'éléments h ou d. Il y en a $\boxed{2^n}$ choix possibles.
   - Au bout de n déplacements, on atteint un point de la forme (k,p) avec $k+p=n$, soit $p=n-k$. Ainsi les points atteints sont les points $(k,n-k)$, avec $k \in \{0,\dots,n\}$, qui correspondent à la diagonale du carré $n\times n$. Il y a donc $\boxed{n+1}$ points distincts.
2. **2.1)** Pour relier A et B, il suffit de faire successivement m déplacements vers la droite et n déplacements vers le haut et ceci dans n'importe quel ordre. On a donc $m+n$ déplacements à faire au total. On commence par choisir le nombre de façon de placer les m déplacements vers la droite : on doit choisir m déplacements parmi $n+m$, sans ordre et sans répétition, soit $\binom{n+m}{m}$. Il n'y a ensuite plus le choix pour les autres déplacements, qui sont nécessairement des déplacements vers le haut. On obtient donc : $\boxed{\binom{m+n}{m}}$ chemins croissants permettent de relier A et B.

   2.2) Comme dans la question précédente, pour relier A et C_k, il suffit de faire successivement k déplacements vers la droite et $p-k$ déplacements vers le haut, soit $p-k+k=p$ déplacements au total. Avec le même raisonnement, on obtient donc $\binom{p}{k}$ chemins possibles de A jusqu'à C_k.
   Puis pour relier C_k et B, il suffit de faire successivement $m-k$ déplacements vers la droite et $n-(p-k)$ déplacements vers le haut, soit $m-k+n-(p-k)=m+n-p$ déplacements au total. On obtient donc $\binom{m+n-p}{m-k}$ chemins possibles de C_k à B (on remarque que ce nombre de chemins est bien nul dès que $k>m$ où que $p-k>n$).
   Ces choix sont successifs, on a donc $\binom{p}{k}\times\binom{m+n-p}{m-k}$ chemins possibles pour aller de A à B en passant par C_k.
   On veut en déduire une autre formule pour le nombre de chemins de A à B. Pour aller de A à B, au bout de p déplacements, on est forcément sur un point de la forme $(k,p-k)$, avec $k\in\{0,\dots,p\}$. Il suffit donc de sommer ces différentes possibilités, et on obtient $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{m+n-p}{m-k}$
   Sachant que les termes de la somme sont nuls dès que $k>m$, et en identifiant avec le résultat trouvé à la question précédente, on a donc :
   $\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}\binom{m+n-p}{m-k}=\binom{m+n}{m}$..
   Pour retrouver la formule de VANDERMONDE, il suffit de faire un changement dans le nom des variables, et poser $M=m+n-p$, $N=p$ et $R=m$. On obtient alors $\boxed{\sum_{k=0}^{R}\binom{N}{k}\binom{M}{R-k}=\binom{M+N}{R}}$, ce qui est bien la formule voulue.

Exercice 19 | **Couples de parties d'intersection fixée** Soit E un ensemble fini de cardinal n. On considère l'ensemble :

$$F=\left\{(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2 \,\middle|\, \operatorname{Card}(A\cap B)=1\right\}.$$

1. Calculer Card F de deux manières différentes.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k2^{n-k}$.

Solution (exercice 19)

1. - On peut commencer par découper F suivant l'élément que constitue l'intersection, *i.e.* en écrivant que
   $$F=\bigcup_{x\in E}F_x$$
   où $F_x=\left\{(A,B)\in P(E)^2,\quad A\cap B=\{x\}\right\}$, et chercher Card F_x pour tout $x\in E$. Pour ce calcul, on ne cherche pas à remplir les deux parties A, B mais plutôt on va parcourir les éléments de E sauf x et regarder combien il y a de possibilités d'appartenance. Notons $E=\{x_1,\dots,x_{n-1}\}\uplus\{x\}$, avec $x_i\neq x$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n-1]\!]$.
   Le nombre de couples de parties $(A,B)\in F_x$ est de manière équivalente le

nombre de façons de répartir les éléments x entre $A\backslash A\cap B$, $B\backslash A\cap B$ et $E\backslash A\cup B$, il y a donc 3 choix possibles pour chaque x_i, donc 3^{n-1} choix possibles au total. Ainsi

$$\operatorname{Card} F = \sum_{x\in E} 3^{n-1} = \boxed{n3^{n-1}}.$$

- On peut aussi découper F selon le nombre d'éléments dans A (par exemple).

$$F = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

où $A_k = \left\{(A, B) \in P(E)^2, \quad \operatorname{Card}(A\cap B) = 1, \quad \operatorname{Card} A = k\right\}$. Pour compter les éléments de A_k, $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, on commence par choisir les k éléments de A au total $\binom{n}{k}$ possibilités, puis l'élément de $A\cap B$ donc k choix possibles, et enfin pour les $n-k$ restants dans E qui ne sont pas dans A cela revient à compter le nombre de parties possibles dans un ensemble à 2^{n-k} éléments donc 2^{n-k} possibilités. Ainsi

$$\operatorname{Card} A_k = \binom{n}{k}\cdot k\cdot 2^{n-k}.$$

Ainsi

$$\operatorname{Card} F = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot 2^{n-k}}.$$

2. On a donc établi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot 2^{n-k} = n3^{n-1}}.$$

II

Deuxième partie

Analyse