

# Programme de colles

## du 10 au 14/2/2025

- Cette semaine : 1 question de cours.
- En probabilités : uniquement des questions de cours cette semaine, et éventuellement un exercice avec du dénombrement, mais uniquement ça. Pas encore de formules (formule des probabilités totales, probabilités composées *etc.*) car le gros du TD sera fait la semaine prochaine.
- Sur l'échelonnement/systèmes : soit juste un système, soit un calcul d'inverse de matrice rapide.

### 1. [MATHS] ÉCHELONNEMENT & SYSTÈMES LINÉAIRES



- **Échelonnement matriciel.** Opérations élémentaires, traduction matricielle. Notion de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite, de pivot. Rang d'une matrice définie comme le nombre de pivots.
- **Systèmes linéaires.** Définition. Matrice associée à un système, écriture matricielle. Système de CRAMER. Structure de l'ensemble des solutions. Méthode par substitution sur des systèmes simples. Méthode par échelonnement : présentation sous forme de matrice augmentée, ou de système directement, notion d'inconnue principale et d'inconnue auxiliaire, nombre en fonction du rang. Équivalence de systèmes, et justification du fait que l'échelonnement conduit à un système équivalent.
- **Échelonnement et inversibilité.** Équivalence entre : matrice inversible de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , son rang valant  $n$ , son échelonnée réduite est  $I_n$  et tout système associé est de CRAMER. Nouvelles méthodes de calcul de l'inverse : miroir et résolution d'un système associé.
- **Matrice  $A - \lambda I_n$ .** Remarques générales sur les opérations autorisées pour gérer l'échelonnement d'un système ou matrice à paramètre. Recherche des  $\lambda$  tels que  $A - \lambda I_n$  ne soit pas inversible sur plusieurs exemples : matrice  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ .

### 2. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES, DÉNOMBREMENT.



#### ! Attention

1. En 1er exercice sur le sujet, privilégier un exercice avec « protocole de dénombrement » dans des contextes concrets (construction de l'objet à compter *via* choix successifs). Idéalement, des contextes probabilistes (urnes, boules et compagnie).
2. Les exercices théoriques ne sont pas dans l'esprit du programme.

- **Compléments sur les ensembles.** Extension des définitions de réunion, intersection, complémentaire, différence vues en début d'année. Lois de MORGAN et règles opératoires. Notion de partition d'un ensemble.
- **Dénombrement.** Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit cartésien, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis. Listes, permutations, combinaisons, cardinaux associés. Propriétés des coefficients binomiaux à l'aide du dénombrement.

### 3. [MATHS] ESPACES PROBABILISÉS



#### ! Attention

- En 1ère année : les univers sont finis, et les évènements sont toutes les parties de l'univers.
- On peut néanmoins proposer des expériences d'univers non fini, du moment qu'aucune difficulté technique n'apparaît dans la résolution (séries, par exemple).

- **Introduction.** Probabilités ou Statistiques ?
- **Axiomatique des probabilités.** Notion d'univers, d'évènements, évènements élémentaires. Espace probabilisable, espace probabilisé : définition d'une probabilité, propriétés. Contexte d'équiprobabilité, probabilité uniforme. Probabi-

lité associée à une famille finie de réels positifs de somme 1. Système complet et quasi-complet d'évènements.

- **Conditionnement & Indépendance d'évènements.** Probabilité conditionnelle. Indépendance de deux évènements, puis d'un nombre quelconque. Propriétés de l'indépendance.

## QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Trouver, selon deux méthodes (échelonnement et déterminant), les  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $A - \lambda I_2$  ne soit pas inversible lorsque  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .
2. Trouver, par échelonnement, les  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $A - \lambda I_3$  ne soit pas inversible lorsque  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ . (Réponse :  $\lambda = \pm 3$ )
3. Soit  $I$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties d'un ensemble  $E$ . Écrire la définition (avec accolades) de  $\bigcap_{i \in I} A_i$ ,  $\bigcup_{i \in I} A_i$ , et rappeler les lois de MORGAN.
4. Soient  $A, B \subset E$ . Rappeler les formules donnant  $\text{Card}(B \setminus A)$  et  $\text{Card}(A \cup B)$ . Démontrer ces deux formules.
5. Soient  $p, n$  deux entiers positifs tels que  $0 \leq p \leq n$ . Donner le nombre de  $p$ -listes, et le nombre de  $p$ -listes d'éléments distincts d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ . Justifier ces deux formules.
6. Soient  $p, n$  deux entiers positifs tels que  $0 \leq p \leq n$ . Donner le nombre de  $p$ -combinaisons d'éléments distincts d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ , et le nombre de permutations d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ . Déduire le nombre d'anagrammes de CHEVAL et ANANAS.
7. Soient  $A, B$  deux évènements. Définir «  $A$  indépendant de  $B$  » ( $A \perp\!\!\!\perp B$ ). Montrer que si  $A \perp\!\!\!\perp A$ , alors  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $1$ .
8. Soient  $A, B$  deux évènements. Définir «  $A$  indépendant de  $B$  » ( $A \perp\!\!\!\perp B$ ), et «  $A, B$  incompatibles ». Préciser laquelle des deux hypothèses sert pour calculer  $\mathbb{P}(A \cup B)$  d'une part, et  $\mathbb{P}(A \cap B)$  d'autre part. (Conseil aux élèves : question de cours à méditer pendant plusieurs heures 😊)
9. Définition d'un système complet d'évènements fini  $(A_i)_{i=1}^n$ , citer la formule des probabilités totales.
10. Citer la formule des probabilités composées. La prouver dans le cas  $n = 3$ . (Note aux élèves et colleurs : on ne se préoccupera pas de l'hypothèse dans la démonstration, c'est-à-dire de la bonne définition des probabilités conditionnelles.)
11. Citer la formule de BAYES, puis la démontrer.

### Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : toutes les probabilités puis les polynômes.