Programme de colles
du 17 au 21/2/2025

- Cette semaine : <u>**1**</u> question de cours.
- <u>**Rappel important :**</u> les colles de la rentrée sont annulées pour cause de concours blanc. On reprendra un rythme normal à partir de la seconde semaine. Bonnes vacances !

1. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES, DÉNOMBREMENT.

Attention

1. En 1er exercice sur le sujet, privilégier un exercice avec « protocole de dénombrement » dans des contextes concrets (construction de l'objet à compter *via* choix successifs). Idéalement, des contextes probabilistes (urnes, boules et compagnie).
2. Les exercices théoriques ne sont pas dans l'esprit du programme.

- **Compléments sur les ensembles.** Extension des définitions de réunion, intersection, complémentaire, différence vues en début d'année. Lois de Morgan et règles opératoires. Notion de partition d'un ensemble.
- **Dénombrement.** Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit cartésien, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis. Listes, permutations, combinaisons, cardinals associés. Propriétés des coefficients binomiaux à l'aide du dénombrement.

2. [MATHS] ESPACES PROBABILISÉS

Attention

- En 1ère année : les univers sont finis, et les évènements sont toutes les parties de l'univers.
- On peut néanmoins proposer des expériences d'univers non fini, du moment qu'aucune difficulté technique n'apparait dans la résolution (séries, par exemple).

- **Introduction.** Probabilités ou Statistiques ?
- **Axiomatique des probabilités.** Notion d'univers, d'évènements, évènements élémentaires. Espace probabilisable, espace probabilisé : définition d'une probabilité, propriétés. Contexte d'équiprobabilité, probabilité uniforme. Probabilité associée à une famille finie de réels positifs de somme 1. Système complet et quasi-complet d'évènements.
- **Conditionnement & Indépendance d'évènements.** Probabilité conditionnelle. Indépendance de deux évènements, puis d'un nombre quelconque. Propriétés de l'indépendance.
- **Formules probabilistes.** Pour traiter un « OU aléatoire » : probabilités totales (pour un système complet d'évènements ou au pire un système quasi-complet d'évènements). Pour traiter des intersections d'évènements non-indépendants : probabilités composées. Pour retourner un conditionnement : formule de Bayes. **Pour commencer, les élèves peuvent bien sûr s'aider d'un arbre en cas de besoin. Il faut néanmoins que la rédaction s'appuie ensuite sur l'une de ces formules.**

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit I un ensemble et $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble E. Écrire la définition (avec accolades) de $\bigcap_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i, \bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i$, et rappeler les lois de Morgan.
2. Soient $\mathrm{A},\mathrm{B}\subset\mathrm{E}$. Rappeler les formules donnant $\mathrm{Card}(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})$ et $\mathrm{Card}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$. Démontrer ces deux formules.
3. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0\leqslant p\leqslant n$. Donner le nombre de p-listes, et le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n. Justifier ces deux formules.
4. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0\leqslant p\leqslant n$. Donner le nombre de p-combinaisons d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n, et le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n. Déduire le nombre d'anagrammes de CHEVAL et ANANAS.
5. Soient A,B deux évènements. Définir « A indépendant de B » ($\mathrm{A}\perp\!\!\!\perp\mathrm{B}$). Montrer que si $\mathrm{A}\perp\!\!\!\perp\mathrm{A}$, alors $\mathbb{P}(\mathrm{A})=0$ ou 1.

6. Soient A, B deux évènements. Définir « A indépendant de B » ($A \perp\!\!\!\perp B$), et « A, B incompatibles ». Préciser laquelle des deux hypothèses sert pour calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ d'une part, et $\mathbb{P}(A \cap B)$ d'autre part. *(Conseil aux élèves : question de cours à méditer pendant plusieurs heures 🙂)*
7. Définition d'un système complet d'évènements fini $(A_i)_{i=1}^{n}$, citer la formule des probabilités totales.
8. Citer la formule des probabilités composées. La prouver dans le cas $n = 3$. *(Note aux élèves et colleurs : on ne se préoccupera pas de l'hypothèse dans la démonstration, c'est-à-dire de la bonne définition des probabilités conditionnelles.)*
9. Citer la formule de Bayes, puis la démontrer.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les polynômes.