Programme de colles
du 17 au 21/3/2025

- Cette semaine : **1** question de cours.
- Je ne mets pas le chapitre de limites complet (hors questions de cours) au programme de colles (il est terminé, mais je n'ai pas commencé le TD). Mais après la question de cours, merci de commencer par un exercice comportant un ou plusieurs calculs de limites niveau lycée (opérations, composition, taux d'accroissement, encadrement, minoration, majoration, croissances comparées). En particulier : pas d'équivalents, pas de caractérisation séquentielle.

1. [MATHS] POLYNÔMES.

Pour les élèves : il est très (très très, même) fortement conseillé de revoir le chapitre sur les complexes par la même occasion, en accentuant vos révisions sur la résolution d'équations (second degré, $z^n = \alpha$, …)

Attention

- Les polynômes sont vus comme des fonctions polynomiales en BCPST.
- En arithmétique : rien du tout à part le symbole de divisibilité (je n'ai même pas donné de propriétés).
- Les notions de polynôme irréductible, scindé, la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ sont hors-programme. Les relations coefficients/racines sont au programme uniquement pour le degré 2.
- La caractérisation de la multiplicité exacte avec le polynôme dérivé est hors-programme : seul le résultat « λ est une racine multiple de P si, et seulement si, $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ » l'est.

- **Définition de $\mathbb{K}[X]$.** Définition, degré, coefficient dominant, cas du polynôme nul, opérations (somme, produit, multiplication par un réel/complexe, composition). Propriétés du degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}_{=n}[X]$. Équation-produit sur $\mathbb{K}[X]$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$). Représentation d'un polynôme par une liste : fonction degré, évaluation (méthode naïve), dérivation, multiplication par X.
- **Polynôme dérivé.** Définition de la dérivée première, dérivées successives. Propriétés de la dérivation (immédiates pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, admises pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Degré et dérivation. Unicité des coefficients d'un polynôme.
- **Racines.** Divisibilité d'un polynôme par un autre. Définition d'une racine. Tout polynôme de degré impair possède une racine réelle. Racines multiples : définition et lien avec le polynôme dérivé. Comptage de racines.
- **Factorisation.** Allure de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, exemples de recherche de racines. Retour sur la résolution de $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Relations coefficients / racines pour le degré 2.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir le polynôme dérivé une fois, puis k fois, puis donner sans justification une formule pour $\left[(X-a)^n\right]^{(k)}$.
2. Définir $P \mid Q$ pour deux polynômes P, Q. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1.$$
3. Réciter et compléter : « Si P possède strictement plus de racines que …, alors … ». Application : soit $n \geqslant 0$ un entier, $C \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P(k) = C. \quad \text{Montrer que } P = C.$$
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Définir « λ est racine de P de multiplicité m », et « λ est une racine multiple de P ». Reformuler la seconde à l'aide du polynôme dérivé.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler l'encadrement définissant $\lfloor x \rfloor$, le graphe de la partie entière, préciser la limite à droite et gauche en chaque entier.
6. Rappeler la proposition faisant le lien entre la limite à droite, la limite à gauche et la limite en un point d'une fonction. Application : limite éventuelle en zéro des fonctions (que l'on commencera par représenter graphiquement)
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}^\star \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2}. \end{array}\right.$$
7. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. *(Pour les élèves : attention aux quantificateurs!)* Justifier que la fonction $f \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$ n'admet pas de limite en 0^+.
8. Citer le théorème d'encadrement (version classique et version valeur absolue), puis montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{e^x} = 0.$
9. Définir la notion de fonctions f, g équivalentes en un point x_0. Rappeler et établir l'équivalent usuel portant sur arctan.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore… et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : limites, continuité, dérivabilité.