Programme de colles
du 24 au 28/3/2025

- Cette semaine : 1 question de cours.

1. [MATHS] POLYNÔMES.

Pour les élèves : il est très (très très, même) fortement conseillé de revoir le chapitre sur les complexes par la même occasion, en accentuant vos révisions sur la résolution d'équations (second degré, $z^n = \alpha$, …)

Attention

- Les polynômes sont vus comme des fonctions polynomiales en BCPST.
- En arithmétique : rien du tout à part le symbole de divisibilité (je n'ai même pas donné de propriétés).
- Les notions de polynôme irréductible, scindé, la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ sont hors-programme. Les relations coefficients/racines sont au programme uniquement pour le degré 2.
- La caractérisation de la multiplicité exacte avec le polynôme dérivé est hors-programme : seul le résultat « λ est une racine multiple de P si, et seulement si, $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ » l'est.

- **Définition de $\mathbb{K}[X]$.** Définition, degré, coefficient dominant, cas du polynôme nul, opérations (somme, produit, multiplication par un réel/complexe, composition). Propriétés du degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}_{=n}[X]$. Équation-produit sur $\mathbb{K}[X]$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$). Représentation d'un polynôme par une liste : fonction degré, évaluation (méthode naïve), dérivation, multiplication par X.
- **Polynôme dérivé.** Définition de la dérivée première, dérivées successives. Propriétés de la dérivation (immédiates pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, admises pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Degré et dérivation. Unicité des coefficients d'un polynôme.
- **Racines.** Divisibilité d'un polynôme par un autre. Définition d'une racine. Tout polynôme de degré impair possède une racine réelle. Racines multiples : définition et lien avec le polynôme dérivé. Comptage de racines.
- **Factorisation.** Allure de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, exemples de recherche de racines. Retour sur la résolution de $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Relations coefficients / racines pour le degré 2.

2. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES LIMITES

Ce chapitre vient compléter celui sur les limites de fonctions de début d'année. On privilégie les nouveautés : fonctions avec rupture d'expression en un point, utilisation de suite pour nier des limites, calculs de limites par équivalents etc.

Attention

Les exercices « epsilonesques » ne sont pas dans l'esprit du programme ; à garder plutôt pour la fin de la colle si le reste a été réussi.

- **Notion de limites.** Rappel sur : les définitions de la limite en un point du bord du domaine de définition, limite à droite et à gauche, opérations. Différents calculs de limites pour les fonctions définies par morceaux. Composition des limites. Caractérisation séquentielle, utilisation pour nier des limites. Croissances comparées.
- **Limites et inégalités.** Théorème d'encadrement, de majoration/minoration.
- **Équivalents.** Définition, propriétés et équivalents usuels (les mêmes que pour les suites).

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir ce qu'est un polynôme, expliquer comment les représenter en Python. Écrire deux fonctions :
   - `degre` qui étant donné un polynôme `P` renvoie son degré,
   - `evalu` *(méthode naïve avec symbole **)* qui étant donnés `P` et `x` renvoie `P(x)`.
2. Définir le polynôme dérivé une fois, puis k fois, puis donner sans justification une formule pour $\left[(X-a)^n\right]^{(k)}$.
3. Définir $P \mid Q$ pour deux polynômes P, Q. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1.$$
4. Réciter et compléter : « Si P possède strictement plus de racines que …, alors … ». Application : soit $n \geqslant 0$ un entier, $C \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P(k) = C. \quad \text{Montrer que } P = C.$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Définir « λ est racine de P de multiplicité k », et « λ est une racine multiple de P ». Reformuler la seconde à l'aide du polynôme dérivé.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler l'encadrement définissant $\lfloor x \rfloor$, le graphe de la partie entière, préciser la limite à droite et gauche en chaque entier.

7. Rappeler la proposition faisant le lien entre la limite à droite, la limite à gauche et la limite en un point d'une fonction. Application : limite éventuelle en zéro des fonctions (que l'on commencera par représenter graphiquement)

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}^\star \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^2}. \end{array} \right.$$

8. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. *(Pour les élèves : attention aux quantificateurs!)* Justifier que la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$ n'admet pas de limite en 0^+.

9. Citer le théorème d'encadrement (version classique et version valeur absolue), puis montrer que : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{e^x} = 0$.

10. Définir la notion de fonctions f, g équivalentes en un point x_0. Rappeler et établir l'équivalent usuel portant sur arctan.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : limites, continuité, dérivabilité.