

Programme de colles

du 31 au 4/4/2025

- Cette semaine : 1 question de cours en Maths.

1. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES LIMITES



Ce chapitre vient compléter celui sur les limites de fonctions de début d'année. On privilégie les nouveautés : fonctions avec rupture d'expression en un point, utilisation de suite pour nier des limites, calculs de limites par équivalents etc.

Attention
Les exercices « epsilonesques » ne sont pas dans l'esprit du programme ; à garder plutôt pour la fin de la colle si le reste a été réussi.

- **Notion de limites.** Rappel sur : les définitions de la limite en un point du bord du domaine de définition, limite à droite et à gauche, opérations. Différents calculs de limites pour les fonctions définies par morceaux. Composition des limites. Caractérisation séquentielle, utilisation pour nier des limites. Croissances comparées.
- **Limites et inégalités.** Théorème d'encadrement, de majoration/minoration.
- **Équivalents.** Définition, propriétés et équivalents usuels (les mêmes que pour les suites).

2. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVATION



- **Compléments sur la continuité.** Rappel sur : la continuité, à droite à gauche, opérations sur les fonctions continues, théorème de la bijection. Prolongement par continuité d'une fonction, fonctions continues.
- **Grands théorèmes de continuité.** Théorème des valeurs intermédiaires, algorithme de dichotomie pour résoudre $f(x) = 0$ de manière approchée. Théorème des bornes atteintes, retour sur le théorème de la bijection.
- **Compléments sur la dérivation.** Rappel sur : la dérivabilité, à droite et à gauche, opérations sur les fonctions dérivables, tangente. Dérivées successives.
- **Grands théorèmes de dérivation.** Théorème de ROLLE, égalité des accroissements finis, preuve du résultat sur le signe de la dérivée et la monotonie.

Attention

L'inégalité des accroissements finis est hors-programme.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. (Pour les élèves : attention aux quantificateurs!) Justifier que la fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$ n'admet pas de limite en 0^+ .
2. Citer le théorème d'encadrement (version classique et version valeur absolue), puis montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{e^x} = 0$.
3. Définir la notion de fonctions f, g équivalentes en un point x_0 . Rappeler et établir l'équivalent usuel portant sur arctan.
4. Rappeler la définition de fonction continue en un point, et continue sur un intervalle. Étudier la continuité de $h : x \rightarrow \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
5. ➤_🔗 Fonction Python résolvant de manière approchée l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie où f est une fonction continue changeant de signe sur $[a, b]$. Expliquer comment utiliser cette fonction pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à une précision fixée.
6. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application continue. Alors montrer que f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
7. Définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 (pour les élèves, on médite plusieurs heures le panneau attention qui suit ladite définition ...)
Application : soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^2 \ln(x)$. Montrer que f se prolonge en zéro par continuité, et montrer que le prolongement est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

8. Citer le théorème de ROLLE et l'égalité des accroissements finis. Interpréter géométriquement sur deux dessins distincts.
9. Montrer à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à $t \mapsto \ln(1+t)$ sur $[0, x]$ pour tout $x > 0$) que : $\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les espaces vectoriels.