Chapitre (AN) 5 **Compléments sur les limites**

Résumé de cours

1. NOTION DE LIMITE

Cadre
Jusqu'à la fin de la section, I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point même lorsque cela n'est pas précisé.

1.1. Voisinage

Définition 1 | Voisinage
- On appelle *voisinage de* $+\infty$ tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
- On appelle *voisinage de* $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
  - On appelle *voisinage de* x_0 tout intervalle de la forme $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ où $\eta > 0$.
  - On appelle *voisinage de* x_0^- tout intervalle de la forme $]x_0-\eta, x_0[$ où $\eta > 0$.
  - On appelle *voisinage de* x_0^+ tout intervalle de la forme $]x_0, x_0+\eta[$ où $\eta > 0$.

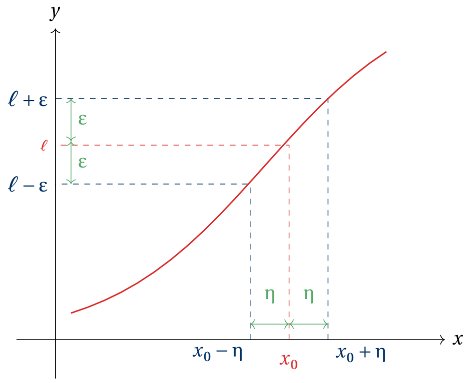
Définition 2 | Propriété vraie sur un voisinage
Soit $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On dit qu'une propriété, dépendant d'une variable x, est vraie *au voisinage de* x_0 *(resp.* x_0^+, x_0^-*)* si elle est vraie pour tout $x \in \mathrm{V}_{x_0}$ où V_{x_0} est un voisinage de x_0 (*resp.* x_0^+, x_0^-).

1.2. Limite en un point

Définition 3 | Limite finie en un point
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *lorsque* x *tend vers* x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall \underbrace{x \in \mathrm{I},}_{\substack{x\in \mathrm{I}\\ f(x)\text{existe}}} \quad \underbrace{|x-x_0| < \eta}_{x \text{ proche de } x_0} \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire :
« tout intervalle du type $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0 *(en restant dans le domaine de définition)* . »



Limite finie en un point fini

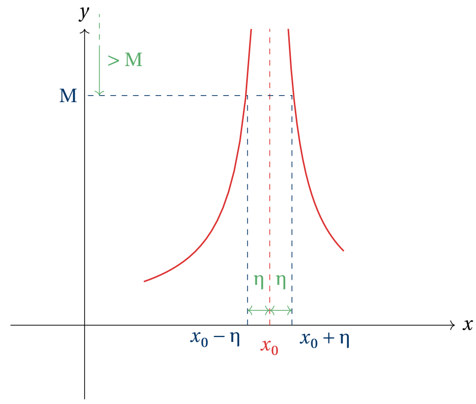
Remarque 1 On a par définition : $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} \ell \iff f(x)-\ell \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$.

Proposition 1 | Unicité de la limite
Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I), alors celle-ci est unique.

Proposition 2 | Limite finie en un point de l'ensemble de définition
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, et $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est } \underline{\textbf{définie en}}\ x_0 \ (i.e.\ x_0 \in \mathrm{I}) \\ \textbf{(ii)} & f \text{ possède une limite finie en } x_0 \end{cases} \implies \lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Définition 4 | Limite infinie en un point
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I).
- On note $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} +\infty$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si :
$$\forall \mathrm{M} > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-x_0| < \eta \implies f(x) > \mathrm{M},$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de x_0 ».
- De même, on note : $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} -\infty$, on encore : $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si :
$$\forall \mathrm{M} < 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x-x_0| < \eta \implies f(x) < \mathrm{M},$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de x_0 ».
- Graphiquement, dans ces deux cas, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une *asymptote verticale* à la courbe.



Limite infinie en un point fini

1.3. Limite en plus ou moins l'infini

Définition 5 | Limite en $+\infty$
Soit I un intervalle du type $[b, +\infty[$ où $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
- On dit que f *a pour limite* ℓ *en* $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow +\infty} \ell$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \ell$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > a \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon,$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez grand ». Graphiquement, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe.
- On dit que f *a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow +\infty} +\infty$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$ si :
$$\forall \mathrm{M} > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > a \implies f(x) > \mathrm{M},$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand ».
- On dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow +\infty} -\infty$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = -\infty$ si :
$$\forall \mathrm{M} < 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > a \implies f(x) < \mathrm{M},$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit assez grand ».

Définition 6 | Limite en $-\infty$
Soit I un intervalle du type $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$.
- On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow -\infty} \ell$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \ell$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x < a \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon,$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez petit ». Graphiquement, on dit que la droite $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe.
- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow -\infty} +\infty$, ou encore $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = +\infty$ si :
$$\forall \mathrm{M} > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x < a \implies f(x) > \mathrm{M},$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut,

pourvu que x soit assez petit ».

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$, ou encore $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si :
$$\forall M<0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad x<a \implies f(x)<M,$$
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit assez petit ».

1.4. Limite à gauche, limite à droite

LIMITE À DROITE OU À GAUCHE. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite **et** à gauche, cela signifie que x se « rapproche par la droite ou la gauche » du point x_0.

Définition 7 | Limite à droite/gauche

Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- On suppose que $]-\infty, x_0[\cap I \neq \emptyset$ (c'est-à-dire f est définie au voisinage de x_0^-). On dit que f *admet ℓ pour limite à gauche en x_0* si :
$$\begin{array}{rcl}]-\infty, x_0[\cap I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{admet } \ell \text{ pour limite en } x_0.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ la limite à gauche. *(Autrement dit, la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, x_0[\cap I$ possède une limite égale à ℓ lorsque x tend vers x_0)*
- On suppose que $I\cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$ (c'est-à-dire f est définie au voisinage de x_0^+). On dit que f *admet ℓ pour limite à droite en x_0* si :
$$\begin{array}{rcl} I\cap]x_0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{admet } \ell \text{ pour limite en } x_0.$$
On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ la limite à droite. *(Autrement dit, la restriction de f à l'intervalle $I\cap]x_0, +\infty[$ possède une limite égale à ℓ lorsque x tend vers x_0)*

Dans la version avec quantificateurs de la définition, cela revient à remplacer l'inégalité « $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$ » (se rapprocher par la droite ou la gauche) par :

- « $x \in]x_0-\eta, x_0[$ » (se rapprocher par la gauche pour la limite à gauche),
- ou « $x \in]x_0, x_0+\eta[$ » (se rapprocher par la droite pour la limite à droite).

P

Corollaire 1 | Non-existence d'une limite

Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou au bord de I. Alors s'il existe deux suites $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telles que :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0,\ v_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(v_n) \end{cases} \quad \text{alors :} \quad f \text{ n'a pas de limite en } x_0.$$

2. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

2.1. Opérations algébriques sur les limites

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire x_0 est soit un nombre réel, soit $\pm\infty$) et soient f et g deux fonctions admettant toutes les deux une limite en x_0. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

LIMITE DE $f+g$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	+FI	$+\infty$	$+\infty$

LIMITE DE $f\times g$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell\neq0$	$\ell=0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell>0$ $+\infty$ si $\ell<0$	FI	$-\infty$
$\ell'\neq0$	$-\infty$ si $\ell'>0$ $+\infty$ si $\ell'<0$	$\ell\times\ell'$	0	$+\infty$ si $\ell'>0$ $-\infty$ si $\ell'<0$
$\ell'=0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell>0$ $-\infty$ si $\ell<0$	FI	$+\infty$

Proposition 3 | Limite $\implies$ (Limite à droite = limite à gauche)

Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de I (*i.e.* pas au bord de I). Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \implies \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

Proposition 4 | Lien limite et limite à droite / gauche

Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point à l'intérieur de I (*i.e.* pas au bord de I).

- Si f est définie en x_0, alors :
f admet une limite en x_0 $\iff$
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$
Dans ce cas : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Si f n'est pas définie en x_0, alors :
f admet une limite en x_0 $\iff$
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x). \end{cases}$$
Dans ce cas : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

1.5. Caractérisation séquentielle de la limite

On souhaite reformuler ici la définition de la limite avec des suites.

Théorème 1 | Caractérisation séquentielle de la limite

- Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ ou au bord de I. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :
$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} \ell \in \mathbb{R} \iff \left[\left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}, \quad u_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0\right) \implies f(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} \ell\right].$$
- Autrement dit, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Attention

Le quantificateur $\forall$ est **très** important.

LIMITE DE f/g

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell\neq0$	$\ell=0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell'\neq0$	$-\infty$ si $\ell'>0$ $+\infty$ si $\ell'<0$	$\dfrac{\ell}{\ell}$	0	$+\infty$ si $\ell'>0$ $-\infty$ si $\ell'<0$
$\ell'=0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell>0$ $+\infty$ si $\ell<0$	FI	$-\infty$
$\ell'=0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell>0$ $-\infty$ si $\ell<0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention **Pour retenir, mais sans l'écrire**

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$
- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :
$$\infty-\infty, \quad 0\times\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Tout cela avec des gros guillemets donc.

Attention **Puissances variables $u(x)^{v(x)}$**

- Dans le cas d'une limite de la forme $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, on revient **toujours** à la définition de la puissance :
$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$
On calcule alors la limite de $v(x)\ln(u(x))$, puis on en déduit la limite recherchée, par passage à l'exponentielle.
- En particulier, « 1^∞ » est une forme indéterminée !

2.2. Composition

On rappelle le théorème permettant de déterminer la limite d'une composée de fonctions.

Théorème 2 | Compositions de limites

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient x_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de I, y_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de J et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim\limits_{y \longrightarrow y_0} g(y) = \ell \end{cases} \implies \lim_{x \longrightarrow x_0} g \circ f(x) = \ell.$$

2.3. Croissances comparées

Théorème 3 | Croissances comparées

Soient a, b et c des réels **strictement positifs**.

- **[En $+\infty$]**

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^{cx}} = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(\ln(x))^a}{\mathrm{e}^{cx}} = 0.$$

- **[En 0^+]**

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^b(\ln(x))^a = 0.$$

- **[En $-\infty$]**

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^b \mathrm{e}^{cx} = 0.$$

Comment retenir ce théorème ?

Résumé — Idée des croissances comparées

On se souviendra que :

- l'exponentielle diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de x, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :
$$(\ln x)^a \underset{+\infty}{\ll} x^b \underset{+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{cx}.$$
- Toute puissance de x l'emporte en zéro sur toute puissance de logarithme :
$$x^b(\ln x)^a \underset{0}{\ll} 1.$$
- L'exponentielle tend très vite vers 0 en $-\infty$ et l'emporte sur toutes les puissances de x :
$$x^b \underset{-\infty}{\ll} \mathrm{e}^{cx}.$$

Méthode (AN) 5.1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

3. LIMITES ET INÉGALITÉS

3.1. Passage à la limite dans une inégalité

Signe (local) d'une fonction de limite non nulle. La proposition suivante précise le signe d'une fonction qui possède une limite non nulle en un point, au voisinage de ce point.

Proposition 5 | Encadrement d'une fonction de limite $\ell \neq 0$

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) avec $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R}$.

- Si $\ell > 0$, alors :
$$\frac{\ell}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3\ell}{2} \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$
En particulier, f est strictement positive sur un voisinage de x_0.
- Si $\ell < 0$, alors :
$$\frac{3\ell}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ell}{2} \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$
En particulier, f est strictement négative sur un voisinage de x_0.

Ainsi, si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ alors f est du signe de ℓ sur un voisinage de x_0.

Théorème 4 | Passage à la limite dans une inégalité

Soient f, g deux fonctions définies sur I et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ ou au bord de I.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \textbf{(iii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \implies \ell \leqslant \ell'.$$

3.2. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration

Théorème 5 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère trois fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)}, \\ \textbf{(ii)} & \text{les deux fonctions } f \text{ et } h \text{ admettent } \ell \text{ pour limite en } x_0. \end{cases}$$

Alors : $\quad g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$.

Théorème 6 | Théorème de minoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} +\infty. \end{cases}$$

Alors : $\quad g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} +\infty$.

Théorème 7 | Théorème de majoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty. \end{cases}$$

Alors : $\quad f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty$.

Corollaire 2 | Version valeur absolue & Bornée « × → 0 »

- Soient I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0. \end{cases}$$
Alors : $\quad f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$.
- Par conséquent, le produit d'une fonction bornée au voisinage de x_0 et fonction tendant vers zéro en x_0 est une fonction tendant vers zéro en x_0.

Résumé — Lever une forme indéterminée (rappel)

Voici une liste non exhaustive de résultats utiles pour lever les formes indéterminées (hors développements limités qui seront vus dans un prochain chapitre) :

- factoriser par le terme dominant,
- utiliser le théorème des croissances comparées,
- simplifier une expression avec des racines grâce à sa quantité conjuguée,
- reconnaître la limite d'un taux d'accroissement ou utiliser un équivalent (voir plus tard concernant les équivalents),
- utiliser un théorème d'encadrement, de minoration ou de majoration.

3.3. Limite d'une fonction monotone

On énonce le résultat suivant, analogue à celui concernant les suites monotones (mais beaucoup moins utile en pratique que celui sur les suites).

Théorème 8 | Théorème de la limite monotone

Soit $\mathrm{I} =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < b$, et f une fonction croissante (*resp.* décroissante) telle que f soit définie sur I.

1. **[Aux bornes]**
   - Si f est majorée (*resp.* minorée) sur I, alors f admet une limite finie en b (*resp.* en a).
   - Si f n'est pas majorée (*resp.* pas minorée) sur I, alors :
   $$f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow b} +\infty \quad (\textit{resp.} \quad f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} -\infty).$$
2. **[Dans l'intérieur]** Soit $c \in \mathrm{I}$. Alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en c et on a :
$$\lim_{x \longrightarrow c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x \longrightarrow c^+} f(x).$$

4. EQUIVALENTS

4.1. Définitions et propriétés

Définition 8 | Fonctions équivalentes

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que g **ne s'annule pas au voisinage de** x_0. On dit que f et g sont *équivalentes en* x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$, si : $\quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Attention

Avec notre définition, une fonction ne peut donc être équivalente à la fonction nulle.

Cadre

- **Dans la suite, x_0 désignera un élément de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.**
- **Pour notre définition, $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ implique implicitement que f,g ne s'annulent pas au voisinage de x_0. Nous ne le préciserons donc pas à chaque fois dans les énoncés.**

Méthode (AN) 5.2 (Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement) Supposons que $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ au voisinage de x_0. Alors si :

$$f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x),\ h(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\mathrm{A}(x)$$

où x_0 est une fonction définie au voisinage de x_0 et strictement positive, on montre que $g(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\mathrm{A}(x)$ en :

1. divisant par $\mathrm{A}(x)$ tout l'encadrement : $\dfrac{f(x)}{\mathrm{A}(x)}\leqslant\dfrac{g(x)}{\mathrm{A}(x)}\leqslant\dfrac{h(x)}{\mathrm{A}(x)}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant $x\longrightarrow x_0$.

La même méthode s'applique pour les fonctions strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Proposition 6 | Limite vers équivalent

Soient I un intervalle et $x_0\in\mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$.

- $f(x)\xrightarrow[]{x\to x_0}\ell\neq 0\implies f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\ell$.
- $f(x)\xrightarrow[]{x\to x_0}\ell\neq 0,\quad g(x)\xrightarrow[]{x\to x_0}\ell\neq 0\implies f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

Proposition 7 | Équivalent vers limite

Soient I un intervalle et $x_0\in\mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que : $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$. Alors :

$$\begin{cases}\textbf{(i)} & f(x)\xrightarrow[]{x\to x_0}\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\\ \textbf{(ii)} & f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\end{cases}\implies g(x)\xrightarrow[]{x\to x_0}\ell.$$

4.2. Opérations sur les équivalents

Proposition 8 | Équivalence et opérations usuelles

Soient I un intervalle et $x_0\in\mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère cinq fonctions $f,g,h,a,b:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$.

- **[Réflexivité]** $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.
- **[Symétrique]** $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\iff g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$.
- **[Transitivité]** $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ **et** $g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} h(x)\implies f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$.
- **[Valeur absolue]** $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\implies |f(x)|\underset{x\to x_0}{\sim}|g(x)|$.
- **[Multiplication]** $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} a(x)$ **et** $g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} b(x)\implies f(x)g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} a(x)b(x)$.
- **[Quotient]** $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} a(x)$ **et** $g(x)\underset{x\to x_0}{\sim} b(x)\implies\dfrac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to x_0}{\sim}\dfrac{a(x)}{b(x)}$.

  En particulier : $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\iff\dfrac{1}{f(x)}\underset{x\to x_0}{\sim}\dfrac{1}{g(x)}$.
- **[Exposant]**
  - Si $k\in\mathbb{Z}$: $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\implies f(x)^k\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)^k$.
  - Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et si les fonctions sont strictement positives au voisinage de x_0 : $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\implies f(x)^\alpha\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)^\alpha$.

Attention

Un équivalent n'est **pas** une égalité : on ne peut pas passer un terme d'un côté de l'autre côté par exemple ou même additionner des équivalents comme nous allons le voir.

Attention On ne peut pas ...

- ... **sommer des équivalents**,
- ... **composer des équivalents** par une fonction quelconque, même continue en dehors de celles mentionnées dans la proposition précédente (inverse, valeur absolue, puissance). En particulier, on ne compose pas par l'exponentielle, le logarithme *etc.*.

Pour quelques contre-exemples, voir les exemples qui suivent.

Méthode (AN) 5.3 (Déterminer un équivalent d'une somme en $\pm\infty$) Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

4.3. Equivalents usuels

Comment obtenir des équivalents? Nous allons essentiellement utiliser la définition du nombre dérivé, réécrite sous forme d'un lemme. Mais avant cela, commençons par les polynômes où la technique est déjà connue mais sans jamais avoir parlé d'équivalents.

Proposition 9 | Polynômes et quotients de polynômes

- **[Fonctions polynomiales]** Soient $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $p>q$, et $(a_p,a_{p-1},\dots,a_q)\in\mathbb{R}^{p-q+1}$ avec $a_p\neq 0$ et $a_q\neq 0$, on a :
$$\begin{cases} a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_qx^q\underset{x\to\pm\infty}{\sim}a_px^p,\\ a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_qx^q\underset{x\to 0}{\sim}a_qx^q.\end{cases}$$
- **[Quotient de polynômes]** Soient $(p,q,r,s)\in\mathbb{N}^4$, $p>q$ et $r>s$, $(a_p,a_{p-1},\dots,a_q)\in\mathbb{R}^{p-q+1}$ et $(b_r,b_{r-1},\dots,r_s)\in\mathbb{R}^{r-s+1}$ avec $a_p\neq 0$, $a_q\neq 0$, $b_r\neq 0$, $b_s\neq 0$. On a :
$$\frac{a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_qx^q}{b_rx^r+b_{r-1}x^{r-1}+\ldots+b_sx^s}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\frac{a_px^p}{b_rx^r}\quad\text{et}\quad\frac{a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_qx^q}{b_rx^r+b_{r-1}x^{r-1}+\ldots+b_sx^s}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{a_qx^q}{b_sx^s}.$$

Résumé Équivalents de polynômes et fractions rationnelles

En résumé,

- un équivalent d'un polynôme non nul en $\pm\infty$, pour les suites ou les fonctions, est donné par son monôme de plus haut degré.
- Un équivalent d'un polynôme non nul en 0 pour une fonction est donné par son monôme de plus bas degré.

Pour une fraction rationnelle, on quotiente les équivalents trouvés précédemment.

Pour les fonctions, les équivalents peuvent avoir lieu en n'importe quel point. Il peut donc être utile de savoir les composer entre eux.

Proposition 10 | Changement de variable dans un équivalent

Soient I, J deux intervalles et $x_0\in\mathrm{I}$ (ou au bord de I) ainsi que $y_0\in\mathrm{J}$ (ou au bord de J). On considère trois fonctions $f:\mathrm{J}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:\mathrm{J}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\varphi:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{cases}\textbf{(i)} & \varphi(x)\xrightarrow[]{x\to x_0}y_0\\ \textbf{(ii)} & g\circ\varphi\text{ ne s'annule pas au voisinage de }x_0\\ \textbf{(iii)} & f(y)\underset{y\to y_0}{\sim}g(y)\end{cases}\implies f(\varphi(x))\underset{x\to x_0}{\sim}g(\varphi(x)),$$

On peut retenir que l'on peut faire des « changements de variable » dans des équivalents : ici, poser « $y=\varphi(x)$ ».

Proposition 11 | Equivalent de $f(x)-f(x_0)$ en x_0

Soient I un intervalle et $x_0\in\mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\textbf{(i)} & f\ \text{ dérivable en }x_0,\\ \textbf{(ii)} & f'(x_0)\neq 0,\end{cases}\quad\text{alors : }f(x)-f(x_0)\underset{x\to x_0}{\sim}f'(x_0)(x-x_0).$$

Proposition 12 | Equivalents usuels

- $\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x$
- $\cos x-1\underset{x\to 0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$
- $\tan x\underset{x\to 0}{\sim}x$
- $\mathrm{e}^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x$
- $\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}x$
- $\arctan(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$.
- Pour tout $\alpha\neq 0$, $(1+x)^\alpha-1\underset{x\to 0}{\sim}\alpha x$. En particulier :
$$\sqrt{1+x}-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{2},\quad\frac{1}{1+x}-1\underset{x\to 0}{\sim}-x,\quad\frac{1}{1-x}-1\underset{x\to 0}{\sim}x.$$

Corollaire 3 | Equivalents usuels – Version « composée »

Soient I un intervalle tel que $0\in\mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0}$. Alors :

- $\sin f(x)\underset{x\to 0}{\sim}f(x)$
- $\cos f(x)-1\underset{x\to 0}{\sim}-\dfrac{f(x)^2}{2}$
- $\tan f(x)\underset{x\to 0}{\sim}f(x)$
- $\mathrm{e}^{f(x)}-1\underset{x\to 0}{\sim}f(x)$
- $\ln(1+f(x))\underset{x\to 0}{\sim}f(x)$
- $\arctan(f(x))\underset{x\to 0}{\sim}f(x)$.
- Pour tout $\alpha\neq 0$, $(1+f(x))^\alpha-1\underset{x\to 0}{\sim}\alpha f(x)$. En particulier :
$$\sqrt{1+f(x)}-1\underset{x\to 0}{\sim}\frac{f(x)}{2},\quad\frac{1}{1+f(x)}-1\underset{x\to 0}{\sim}-f(x),\quad\frac{1}{1-f(x)}-1\underset{x\to 0}{\sim}f(x).$$

Méthode (AN) 5.4 (Déterminer un équivalent d'une composée) Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Méthode (AN) 5.5 (Déterminer un équivalent en un point fini autre que zéro)

- Si l'on souhaite un équivalent en $x_0\neq 0$, alors on peut effectuer un changement de variable (si aucun terme ne tendant vers zéro quand $x\to x_0$ n'apparait clairement).
- On pose « $y=x-x_0$ », c'est-à-dire que l'on considère $g(y)=f(y+x_0)$, on cherche un équivalent de g en zéro, puis on conclue sur f par composition d'équivalent.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 5.1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Méthode (AN) 5.2 (Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement) Supposons que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de x_0. Alors si :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x), h(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x)$$

où x_0 est une fonction définie au voisinage de x_0 et strictement positive, on montre que $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x)$ en :

1. divisant par $\mathrm{A}(x)$ tout l'encadrement : $\dfrac{f(x)}{\mathrm{A}(x)} \leqslant \dfrac{g(x)}{\mathrm{A}(x)} \leqslant \dfrac{h(x)}{\mathrm{A}(x)}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant $x \longrightarrow x_0$.

La même méthode s'applique pour les fonctions strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Méthode (AN) 5.3 (Déterminer un équivalent d'une somme en $\pm\infty$) Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

Méthode (AN) 5.4 (Déterminer un équivalent d'une composée) Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Méthode (AN) 5.5 (Déterminer un équivalent en un point fini autre que zéro)

- Si l'on souhaite un équivalent en $x_0 \neq 0$, alors on peut effectuer un changement de variable (si aucun terme ne tendant vers zéro quand $x \to x_0$ n'apparait clairement).
- On pose « $y = x - x_0$ », c'est-à-dire que l'on considère $g(y) = f(y + x_0)$, on cherche un équivalent de g en zéro, puis on conclue sur f par composition d'équivalent.