Chapitre (AN) 6 — **Compléments sur la continuité et la dérivation**

Résumé de cours

Cadre
Dans ce chapitre encore, I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point même lorsque cela n'est pas précisé.

1. COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ

1.1. Continuité locale

Définition 1 | Continuité en un point
Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est *continue en* x_0 si : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention
On parle de continuité en un point de **l'ensemble de définition**, puisque $x_0 \in \mathrm{I}$ dans la définition précédente. La question ne se pose donc même pas en les points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.

Définition 2 | Continuité à droite, continuité à gauche
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que :
- f est *continue à gauche* en x_0 si : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est *continue à droite* en x_0 si : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 1 | Continuité, à gauche et à droite
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Alors :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0$$
$$\iff \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Note — *Attention : puisqu'ici la fonction f est définie en x_0, il ne faut pas oublier l'égalité à $f(x_0)$.*

Preuve Conséquence directe de la proposition qui fait le lien entre limite à droite et limite à gauche.

1.2. Continuité sur un intervalle

Définition 3 | Continuité sur un intervalle
Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :
- *continue sur* I si : $\forall x_0 \in \mathrm{I}, \quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si elle est continue en tout $x_0 \in \mathrm{I}$,
- *continue sur* I *sauf en un nombre fini de points* si elle est continue sur $\mathrm{I} \setminus \mathrm{E}$, où E est un sous-ensemble fini de I.

Notation
On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

CATALOGUE DE FONCTIONS CONTINUES. Les fonctions usuelles, à l'exception de la fonction partie entière pour laquelle tous les entiers relatifs sont des points de discontinuité, sont continues sur leur domaine de définition, c'est-à-dire :

- Les fonctions polynomiales, exponentielle, sinus, cosinus, valeur absolue, racine cubique sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction tangente est continue sur les intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$ (elle est constante sur chaque $]k, k+1[$).
- La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES. Passons maintenant aux propriétés qui vont nous permettre de montrer que des fonctions sont continues en pratique.

Proposition 2 | Opérations sur les fonctions continues en un point
Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
- les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues en x_0.
- De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0.

On déduit immédiatement de la définition d'une fonction continue, des versions locales des deux énoncés précédents leur version globale : « Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Alors les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues sur I. De plus, si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I. »

Théorème 1 | Composition de fonctions continues
Soient I et J deux intervalles, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Alors :
- **[Version locale]** Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est continue en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & g \text{ est continue en } f(x_0) \end{cases} \implies g \circ f \text{ est continue en } x_0.$$
- **[Version globale]** Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Méthode (AN) 6.1 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition, puis on vérifie à la main (calcul de limite) les points qui posent problème.

La notion de fonction continue en un point a, qui est : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a) = f\left(\lim\limits_{x \longrightarrow a} x\right)$ peut donc être comprise comme une « permutation fonction / limite ». Cela fonctionne aussi pour des suites qui tendent vers a.

Théorème 2 | Permutation limite de suite et fonction
Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \text{ converge et, } \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n \in \mathrm{I} \\ \textbf{(ii)} & f \text{ est continue en } \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n \end{cases} \implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n\right).$$

Remarque 1
- Ce théorème permet de permuter limite d'une suite et fonction, lorsque la fonction est continue.
- Ce résultat est crucial dans l'étude de suites récurrentes vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Il nous avait permis de montrer que toute limite finie ℓ de (u_n) est un point fixe de f donc vérifie $\ell = f(\ell)$ si f est continue en ℓ.

1.3. Prolongement par continuité

Définition 4 | Prolongement par continuité
Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ telle que f admette une limite finie en x_0.
- On appelle alors *prolongement par continuité de f en x_0* la fonction $\widehat{f}$ définie sur I tout entier par :
$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}, \\ \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$
- La fonction $\widehat{f}$ est souvent encore notée $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, et elle est continue en x_0. On dit aussi que l'on a effectué un *prolongement par continuité de f en x_0*.

Remarque 2
- On peut définir de manière analogue le prolongement par continuité à gauche de f en x_0 et le prolongement par continuité à droite de f en x_0.
- Lorsque f n'est pas continue en plusieurs points, on étend sans difficulté la définition précédente : il s'agit alors d'analyser l'existence d'une limite en tous les points aux bornes du domaine de définition, en lesquels f n'est pas définie.

2. GRANDS THÉORÈMES DE CONTINUITÉ

2.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer l'existence (mais pas l'unicité!) de solutions d'une équation du type $f(x) = k$, où f est une fonction et k un nombre réel. On commence par le cas $k = 0$.

EXISTENCE D'UNE SOLUTION À L'ÉQUATION $f(x) = 0$. Ce premier cas parait restrictif, mais en fait pas tant que ça puisqu'on peut souvent s'y ramener.

Théorème 3 | Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $a \leqslant b$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** telle que : $\quad f(a) \times f(b) \leqslant 0$. Alors : $\quad \exists c \in [a, b], \quad f(c) = 0$.

Remarque 3 Pour vérifier le changement de signe, on a parfois recours à des calculs de limites. Dans ce cas là, la fonction en question est définie sur $\mathbb{R}$ et on justifie l'existence d'un segment $[a, b]$ sur le quel on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en calculant $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x)$.

(Algorithme de dichotomie pour les fonctions) Cette dernière preuve nous livre directement un algorithme pour approcher ce type de zéros, qui est très important.

```python
def dicho(a, b, f, prec):
    """
    renvoie une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b avec précision
    prec
    """
    g, d = a, b
    while d - g > prec:
        m = (g + d)/2
        if f(g)*f(m) <= 0:
            # changement de signe sur [g,m]
            d = m
        else:
            # pas de changement de signe sur [g,m]
            g = m
    return (g + d)/2
```

On peut aussi adopter une version récursive.

```python
def dicho_rec(a, b, f, prec):
    """
    renvoie une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b avec précision prec
    """
    if b - a <= prec:
        return (a + b)/2
    else:
        m = (a + b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0:
            # changement de signe sur [a,m]
            return dicho_rec(a, m, prec)
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,m]
            return dicho_rec(m, b, prec)
```

Il existe encore d'autres méthodes plus sophistiquées (méthode de NEWTON, de la sécante, *etc*....).

EXISTENCE D'UNE SOLUTION À L'ÉQUATION $f(x) = k$. Le théorème des valeurs intermédiaires est à utiliser lorsque l'on souhaite prouver l'existence d'un réel solution à une équation. Il existe une version plus générale :

Théorème 4 | Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $a \leqslant b$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$: $\quad \exists c \in [a, b], \quad f(c) = k$.

Corollaire 1 | Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Remarque 4 (Aspects informatiques)
- Pour résoudre $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$, on utilise les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes à $x \longmapsto f(x) - \alpha$.
- Pour résoudre $f(x) = x$, on utilise les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes à $x \longmapsto f(x) - x$.

2.2. Théorème des bornes atteintes

Rappelons une définition déjà rencontrée dans le Chapitre (ALG) 2 sur les nombres réels.

Définition 5 | Segment
On appelle *segment* tout intervalle fermé borné, *i.e.* tout intervalle du type $[a, b]$, ou a et b sont deux réels de sorte que $a < b$.

Ainsi, l'intervalle $[2, 5]$ est un segment tandis que l'intervalle $]0, 4]$ n'en est pas un.

Corollaire 2 | Image d'un segment par une fonction continue
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Autrement dit, si f est une continue sur un segment $[a, b]$, on a :
$$f([a, b]) = [m, \mathrm{M}], \quad \text{où :} \quad m = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{[a,b]} f.$$

2.3. Théorème de la bijection

Lorsque l'on souhaite montrer l'existence **mais aussi l'unicité** d'une solution pour une équation du type $f(x) = k$, on aura recours au théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

Théorème 5 | Théorème de la bijection
Soit f une fonction numérique **continue** sur $\mathrm{I} \subset \mathscr{D}_f$, et **strictement monotone** sur I. Alors :
- $f(\mathrm{I})$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$. Plus précisément, l'intervalle $f(\mathrm{I})$ est donné par le tableau suivant :

$f(\mathrm{I})$ \ I	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
str. ↗	$[f(a), f(b)]$	$]\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
str. ↘	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$]\lim_b f, f(a)]$	$]\lim_b f, \lim_a f[$

- La bijection réciproque $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Remarque 5 Ce théorème sert à montrer l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations.

Méthode (AN) 6.2 (Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires) On souhaite justifier l'existence (et l'unicité éventuelle) d'une solution $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(\mathrm{I})$.

Notez également que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, et $\alpha = 0$.

3. COMPLÉMENTS DE DÉRIVATION

On reprend quelques généralités sur les fonctions dérivables, avant d'y ajouter quelques grands théorèmes.

3.1. Rappels : nombre dérivé, fonction dérivable

Définition 6 | Dérivabilité
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.
- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Taux d'accroissement de } f \text{ entre } x \text{ et } x_0} \end{array}\right.$$
admet une limite finie en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0*. *(Puisque x_0 est un bord de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, la limite éventuelle a bien un sens)*
- On dit que f est *dérivable à droite en x_0* (*resp. à gauche*) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche.

Remarque 6
- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

Remarque 7 (Version « x_0+h ») La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$ »), être écrite sous cette forme :

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Notation

On note en général (sous réserve d'existence) :

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f en x_0,
- $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à gauche en x_0,
- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à droite en x_0.

On obtient directement des résultats sur les limites, la propriété suivante.

Proposition 3 | Dérivabilité, à gauche et à droite

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & f'_g(x_0) = f'_d(x_0). \end{cases}$$

Définition 7 | Tangente

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *tangente à f d'abscisse a* la droite d'équation :
$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$
- Si f est dérivable à gauche (*resp.* droite) en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *demi-tangente à gauche (resp. droite) à f d'abscisse x_0* la droite d'équation :
$$y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \quad \left(\textit{resp.} \quad y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right).$$

On dit que f *admet une tangente horizontale en x_0* lorsque $f'(x_0) = 0$.

Rappelons également le lien entre continuité et dérivabilité déjà rencontré et démontré dans le Chapitre (AN) 1.

Théorème 6 | Dérivabilité & Continuité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Attention

La réciproque est, en général, fausse. La valeur absolue est continue en zéro, alors qu'elle n'y est pas dérivable comme nous l'avons déjà constaté.

Définition 8 | Fonction dérivée, Fonction dérivable

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in \mathrm{I}$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de f*.

Notation

On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.

3.2. Dérivées successives, classe d'une fonction

Dérivées d'ordre supérieur. Lorsque f' est encore dérivable, on appelle la dérivée de f' la dérivée *seconde* de f, et ainsi de suite.

Définition 9 | Dérivabilité n-ième

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit, sous réserve d'existence, les *dérivées successives* de f en posant $f^{(0)} = f$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Définition 10 | Classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^n$

- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe $\mathscr{C}^1$* sur I si :
  - ⋄ f est dérivable sur I,
  - ⋄ et si f' est **continue** sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe $\mathscr{C}^n$* sur I si :
  - ⋄ f est n fois dérivable sur I,
  - ⋄ et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I.
- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe $\mathscr{C}^\infty$* si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation $\mathscr{D}_k$ et $\mathscr{C}^k$

- On note $\mathscr{D}^k(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I, donc telles que $f^{(k)}$ existe.
- $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$ est donc l'ensemble des fonctions de $\mathscr{D}^k(\mathrm{I})$ telles que $f^{(k)} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet parfois d'indiquer l'intervalle I.

Remarque 8 (Inclusions) Ainsi, en notant $\mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\mathscr{D}^n(\mathrm{I})$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I,

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^{n+1}(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^n(\mathrm{I}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$$

Attention au vocabulaire

On dit bien « f dérivable à dérivée continue » pour signifier que f est $\mathscr{C}^1$ et pas « f est continue dérivable » qui signifie simplement que f est dérivable ! (car dérivable implique continue).

Proposition 4 | Caractère $\mathscr{C}^k$ des fonctions usuelles

- Les fonctions $x \longrightarrow \cos x$, $x \longrightarrow \sin x$, $x \longrightarrow \tan x$, $x \longrightarrow \arctan x$, $x \longrightarrow \mathrm{e}^x$, $x \longrightarrow \ln(x)$ et $x \longrightarrow x^k$, $k \in \mathbb{Z}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $x \longrightarrow |x|$ et $x \longrightarrow x^a$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition privé de 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, les sommes, produits, combinaisons linéaires, compositions et quotients (bien définis) de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sont de classe $\mathscr{C}^k$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$).

4. GRANDS THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

4.1. Points critiques et extremums locaux

Définition 11 | *Extrema* global / local

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

- **[Global]**
  - ⋄ On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0 \in \mathrm{I}$, et :
  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
  On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I.
  - ⋄ On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0 \in \mathrm{I}$, et :
  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$
  On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I.
- **[Local]** On dit que f admet en $x_0 \in \mathrm{I}$ un *minimum local* / *maximum local* si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage de x_0 dans I, c'est-à-dire sur un domaine de la forme $]x_0-\eta, x_0+\eta[\,\cap\,\mathrm{I}$, pour un certain $\eta > 0$. Ainsi :
  - ⋄ f admet un *maximum local* en x_0 si :
  $$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in]x_0, -\eta, x_0+\eta[\cap \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
  - ⋄ f admet un *minimum local* en x_0 si :
  $$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in]x_0, -\eta, x_0+\eta[\cap \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$
- On dit que f admet en x_0 un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).

Définition 12 | Point critique

On appelle *point critique* d'une fonction dérivable $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ tout réel $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que : $\quad f'(x_0) = 0$.

Théorème 7 | Condition nécessaire d'*extrema* local

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que :

- x_0 est à l'intérieur de I, *i.e.* il existe $\eta > 0$ vérifiant : $\quad]x_0-\eta, x_0+\eta[\, \subset \mathrm{I}$, autrement dit, x_0 n'est pas une borne de I,
- f admet en x_0 un extremum local,
- f est dérivable en x_0.

Alors, $\quad x_0$ est un point critique de f, $\quad$ c'est-à-dire : $\quad f'(x_0) = 0$.

4.2. Théorème de Rolle

Théorème 8 | Théorème de Rolle

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). On suppose que :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- $f(a) = f(b)$. $\qquad$ Alors : $\quad \exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, la courbe possède une tangente horizontale.

Attention

Il n'y a pas unicité d'un tel c, on le constate sur la figure ci-après. On peut aussi considérer la fonction sin sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

4.3. Egalité des accroissements finis

Théorème 9 | Égalité des accroissements finis

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). On suppose que :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, le coefficient directeur de la tangente vaut celui de la sécante entre les points $(a, f(x_0))$ et $(b, f(b))$.

4.4. Lien avec la monotonie

Théorème 10 | Monotonie et signe de la dérivée

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

- **[Monotonie]**

$$f \text{ est croissante} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \geqslant 0,$$
$$f \text{ est décroissante} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

- **[Stricte monotonie]**
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement croissante.
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement décroissante.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 6.1 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition, puis on vérifie à la main (calcul de limite) les points qui posent problème.

Méthode (AN) 6.2 (Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires) On souhaite justifier l'existence (et l'unicité éventuelle) d'une solution $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(\mathrm{I})$.

Notez également que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, et $\alpha = 0$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Si f est une fonction définie sur un intervalle I, et si $a \in \mathrm{I}$, définition de la continuité de f en a	$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$	
Énoncer le théorème de la bijection monotone.	*Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ continue, strictement monotone. Alors f réalise une bijection de I sur J, et f^{-1} est de même monotonie que f Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ continue, strictement monotone. Alors f réalise une bijection de I sur J, et f^{-1} est de même monotonie que f*	
Donner la définition d'une fonction f prolongeable par continuité en un point a	*Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$. Elle est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a. Le prolongement est alors : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I}\setminus\{a\}, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$ Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$. Elle est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a. Le prolongement est alors : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I}\setminus\{a\}, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$*	
Énoncer le théorème de ROLLE	*Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$.*	*Ne pas oublier les hypothèses précises : continue sur le **segment**, dérivable sur l'intervalle **ouvert***
Rappeler la formule des accroissements finis	*Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*	*Ne pas oublier les hypothèses précises : continue sur le **segment**, dérivable sur l'intervalle **ouvert***