Programme de colles
du 7 au 11/4/2025

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths.
- Cette semaine, toujours de la continuité/dérivation, mais essayer de poser si possible des exemples d'utilisation de ce chapitre aux suites (récurrences d'ordre 1 avec le TAF), de suites implicites (avec une question d'info sur l'algo de dichotomie).
- Sur les espaces vectoriels : uniquement des questions de cours cette semaine.

1. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVATION

- **Compléments sur la continuité.** Rappel sur : la continuité, à droite à gauche, opérations sur les fonctions continues, théorème de la bijection. Prolongement par continuité d'une fonction, fonctions continues.
- **Grands théorèmes de continuité.** Théorème des valeurs intermédiaires, algorithme de dichotomie pour résoudre $f(x)=0$ de manière approchée. Théorème des bornes atteintes, retour sur le théorème de la bijection.
- **Compléments sur la dérivation.** Rappel sur : la dérivabilité, à droite et à gauche, opérations sur les fonctions dérivables, tangente. Dérivées successives.
- **Grands théorèmes de dérivation.** Théorème de ROLLE, égalité des accroissements finis, preuve du résultat sur le signe de la dérivée et la monotonie.

Attention

L'inégalité des accroissements finis est hors-programme.

+ RÉVISIONS SUR LES SUITES IMPLICITES ET RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour les colleurs : merci d'aller au plus simple sur les suites choisies, l'essentiel du temps doit être passé sur la dichotomie et l'égalité des accroissements finis.

- **Révisions sur les suites implicites avec 1 question au moins demandant le n-ième terme de la suite selon l'algorithme de dichotomie.** *(Pour les élèves : revoir a minima l'exemple de suite implicite présent à la fin du cours sur les suites, et bien sûr l'algorithme de dichotomie.)*
- **Révisions sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec 1 question utilisant l'égalité des accroissements finis** *(Pour les élèves : revoir a minima l'exemple présent à la fin du cours de compléments sur la continuité et la dérivation, appelé « étude d'une suite récurrente ».)*

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ pour $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On note $u : x \longmapsto \cos^2 x$, $f : x \longmapsto 1$, $g : x \longmapsto \cos(2x)$. Montrer que $u \in \mathrm{Vect}(f,g)$.
2. Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre vecteurs d'un espace vectoriel E. Expliquer comment montrer que $\mathrm{Vect}(x_1,x_2) = \mathrm{Vect}(y_1,y_2)$. *(méthode à énoncer)*
   [Application] Soit $(x,y) \in E^2$, montrer que : $\mathrm{Vect}(x,y) = \mathrm{Vect}(x+y, x-y)$.
3. Donner le résultat que l'on a sur l'intersection et la réunion d'espaces vectoriels. Établir que l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.
4. On note $F = \mathrm{Vect}(X,Y) \subset \mathbb{R}^4$ où $X = (1,2,1,1)$ et $Y = (0,1,1,1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.
5. On note $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \,\middle|\, x+y+z+t=0,\ x=y\right\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, *i.e.* une écriture en Vect.
6. Fonction Python résolvant de manière approchée l'équation $f(x)=0$ par dichotomie où f est une fonction continue changeant de signe sur $[a,b]$. Expliquer comment utiliser cette fonction pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à une précision fixée.
7. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue. Alors montrer que f admet un *point fixe* c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
8. Définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ *(pour les élèves, on médite plusieurs heures le panneau attention qui suit ladite définition ...)*
   Application : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\ln(x)$. Montrer que f se prolonge en zéro par continuité, et montrer que le prolongement est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
9. Citer le théorème de ROLLE et l'égalité des accroissements finis. Interpréter géométriquement sur deux dessins distincts.
10. Montrer à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0,x]$ pour tout $x>0$) que : $\forall x > 0, \quad \dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore… et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les espaces vectoriels.