Programme de colles
du 14 au 18/4/2025

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths.
- Cette semaine : application aux suites de la continuité/dérivabilité, et les espaces vectoriels.

Attention
Pour les espaces vectoriels cette semaine ; merci aux colleurs de poser uniquement des exercices mettant en jeu des éléments de $\mathbb{K}^n$ et des matrices (sauf pour les questions de cours qui portent sur tous les types d'espaces vectoriels). Cela soulèvera suffisamment de difficultés pour la 1ère semaine.

1. [MATHS] ESPACES VECTORIELS

Attention
- Les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, *etc.*) ne le seront pas non plus.
- Les considérations de changement de corps de base ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme.

- **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Espaces-vectoriels usuels (uplets et géométrie, polynômes, matrices, suites et fonctions). Règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes, et les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille. Propriétés sur le Vect. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sous forme paramétrique ou cartésienne.
- **Familles de vecteurs** : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases. Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices.
- **Dimension d'un espace vectoriel et représentation matricielle.** Toutes les bases ont même nombre d'éléments (fait largement admis). Définition de la dimension. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim \mathrm{E}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Représentation matricielle de vecteurs : pour un vecteur, puis pour une famille, propriété du symbole « Mat ». Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré, lien avec le rang de la matrice associée dans une base (nombre de pivots d'une échelonnée). Trouver une base d'un Vect par échelonnement de la matrice de la famille.

2. [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVATION

+ RÉVISIONS SUR LES SUITES IMPLICITES ET RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$ *Pour les colleurs : merci d'aller au plus simple sur les suites choisies, l'essentiel du temps doit être passé sur la dichotomie et l'égalité des accroissements finis.*

- **Révisions sur les suites implicites** **<u>avec 1 question au moins demandant le n-ième terme de la suite selon l'algorithme de dichotomie.</u>** *(Pour les élèves : revoir a minima l'exemple de suite implicite présent à la fin du cours sur les suites, et bien sûr l'algorithme de dichotomie.)*
- **Révisions sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$** **<u>avec 1 question utilisant l'égalité des accroissements finis</u>** *(Pour les élèves : revoir a minima l'exemple présent à la fin du cours de compléments sur la continuité et la dérivation, appelé « étude d'une suite récurrente ».)*

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ pour $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On note $u : x \longmapsto \cos^2 x$, $f : x \longmapsto 1$, $g : x \longmapsto \cos(2x)$. Montrer que $u \in \mathrm{Vect}(f, g)$.

2. Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre vecteurs d'un espace vectoriel E. Expliquer comment montrer que $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$. *(méthode à énoncer)*
[Application] Soit $(x, y) \in E^2$, montrer que : $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(x + y, x - y)$.

3. Donner le résultat que l'on a sur l'intersection et la réunion d'espaces vectoriels. Établir que l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.

4. On note $F = \mathrm{Vect}(X, Y) \subset \mathbb{R}^4$ où $X = (1, 2, 1, 1)$ et $Y = (0, 1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.

5. On note $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \,\middle|\, x + y + z + t = 0,\ x = y\right\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, *i.e.* une écriture en Vect.

6. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Montrer, en utilisant la définition, que l'ensemble
$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

7. Définir « $(x_1, \ldots, x_n)$ libre dans E » *(pour les élèves : attention aux quantificateurs!)* ainsi que le résultat sur les familles échelonnées (notion à définir aussi) de polynômes.

8. Définir « $(x_1, \ldots, x_n)$ génératrice de E » *(pour les élèves : on attend par exemple une écriture propre avec des quantificateurs, ou en terme de* Vect*)* puis « $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E ». Définir ce que l'on appelle les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

9. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ? (on précisera le cas $E = \{0_E\}$). Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

10. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ? Soit $n \geqslant 2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n - 1$.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les développements limités.