Programme de colles
du 12 au 16/5/2025

- Cette semaine : <u>1</u> question de cours en Maths.
- Cette semaine : les espaces vectoriels et les développements limités.

Attention
à partir de jeudi uniquement : l'utilisation des développements limités pour prolonger des fonctions, cela sera vu en cours en début de semaine seulement.

1. [MATHS] ESPACES VECTORIELS

Attention
- Les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, *etc.*) ne le seront pas non plus.
- Les considérations de changement de corps de base ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme.

- **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Espaces-vectoriels usuels (uplets et géométrie, polynômes, matrices, suites et fonctions). Règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes, et les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille. Propriétés sur le Vect. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sous forme paramétrique ou cartésienne.
- **Familles de vecteurs** : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases. Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices.
- **Dimension d'un espace vectoriel et représentation matricielle.** Toutes les bases ont même nombre d'éléments (fait largement admis). Définition de la dimension. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim \mathrm{E}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Représentation matricielle de vecteurs : pour un vecteur, puis pour une famille, propriété du symbole « Mat ». Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré, lien avec le rang de la matrice associée dans une base (nombre de pivots d'une échelonnée). Trouver une base d'un Vect par échelonnement de la matrice de la famille.

2. [MATHS] DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

- **Relation petit o.** Définition, propriétés, lien avec l'équivalence.
- **Développement limité.** Définition en un point finie, et en $\pm\infty$. Unicité du développement limité, et parité/imparité. Développements limités usuels : géométrique, formule de Taylor-Young (conséquences : cos, sin, exp *etc.*)
- **Opérations sur les développements limités.** Troncature, combinaison linéaire, produit, composée, quotient (conséquence : développement limité à l'ordre 5 de la tangente). Primitivation. Ramener des problèmes de développement limité au voisinage de zéro à l'aide d'un changement de variable (*i.e.* en définissant une fonction auxiliaire).
- **Application des développements limités.** Recherche d'équivalents. **<u>à partir de jeudi :</u>** Étude locale d'une fonction (régularité en un point par existence d'un développement limité, équation de la tangente et position relative locale). Prolonger une fonction par continuité en un point à l'aide d'un développement limité, dérivabilité en cas d'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Attention
L'étude des branches infinies n'est plus au programme de BCPST.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \subset \mathbb{R}^4$ où $\mathrm{X} = (1,2,1,1)$ et $\mathrm{Y} = (0,1,1,1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.

2. On note $\mathrm{G} = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{K}^4 \,\middle|\, x+y+z+t=0,\ x=y\right\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, *i.e.* une écriture en Vect.

3. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Montrer, en utilisant la définition, que l'ensemble

$$\mathrm{F} = \left\{ f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

4. Définir « $(x_1,\dots,x_n)$ libre dans E » *(pour les élèves : attention aux quantificateurs!)* ainsi que le résultat sur les familles échelonnées (notion à définir aussi) de polynômes.

5. Définir « $(x_1,\dots,x_n)$ génératrice de E » *(pour les élèves : on attend par exemple une écriture propre avec des quantificateurs, ou en terme de* Vect*)* puis « $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E ». Définir ce que l'on appelle les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

6. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ? (on précisera le cas $\mathrm{E} = \{0_{\mathrm{E}}\}$). Montrer que $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

7. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ? Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{F} = \{\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(1)=0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de dimension $n-1$.

8. Donner le lien entre la relation « petit o » et l'équivalent $\sim$ pour les fonctions. Rappeler les équivalents usuels sur les fonctions exp et cos. En déduire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de exp et un $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos.

9. Rappeler les développements limités de cos, sin du cours. Montrer, selon deux méthodes, que (cos, sin) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *(1ère : celle du chapitre sur les espaces vectoriels, en évaluant en plusieurs x — 2ème : en utilisant les* $\mathrm{DL}_1(0)$ *de* cos *et* sin *et la propriété d'unicité du développement limité)*

10. Citer la formule de Taylor-Young. L'appliquer pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp, et le $\mathrm{DL}_2(1)$ de exp.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les développements limités et les variables aléatoires (début).