Chapitre (AN) 8 Développements limités

Résumé de cours

Cadre

Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire :

- **I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.**
- **Pour $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{V}_a$ désignera « un voisinage de x_0 » (donc un intervalle de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ si $x_0 \in \mathbb{R}$, $]\mathrm{A}, \infty[$ (*resp.* $]-\infty, \mathrm{A}[$) si $x_0 = \infty$ (*resp.* $-\infty$).**

1. NOTION DE NÉGLIGEABILITÉ

Avant d'étudier les développements limités, on doit compléter notre étude des relations de comparaison (dont les équivalents en font partie) avec celle des « petit o ».

1.1. Définition

Définition 1 | Relation de négligeabilité

- **[Fonctions]** Soient $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On dit que f *est négligeable devant g en x_0*, et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$, ou encore $f \underset{x_0}{=} o(g)$, s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que :
$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{au voisinage de } x_0, \quad \text{et :} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[]{x \to x_0} 0.$$
Autrement dit, si g **ne s'annule pas au voisinage de** x_0, la relation signifie :
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}.$$
- **[Suites]** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites. On dit que (u_n) *est négligeable devant* (v_n), et on note $u_n \underset{n \to \infty}{=} o(v_n)$, s'il existe une suite (ε_n) telle que :
$$u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{pour } n \text{ assez grand,} \quad \text{et :} \quad \varepsilon_n \xrightarrow[]{n \to \infty} 0.$$
Autrement dit, si (v_n) **ne s'annule pas à partir d'un certain rang**, la relation signifie :
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}.$$

1.2. Propriétés

Cadre

Dans cette sous-section, x_0 désignera un élément de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Proposition 1 | Petit o et limite

- **[Fonctions]** Soient $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). Alors :
$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$
- **[Suites]** Soit (u_n) une suite. Alors : $u_n \underset{n \to \infty}{=} o(1) \iff \lim_{n \to \infty} u_n = 0.$

Proposition 2 | Petit o et équivalent

- **[Fonctions]** Soient $f, g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). Alors :
$$f(x) = g(x) + \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \iff f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x).$$
- **[Suites]** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites. Alors :
$$u_n = v_n + \underset{n \to \infty}{o}(v_n) \iff u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n.$$

PETIT o ET OPÉRATIONS. Voyons maintenant les principales propriétés de ce nouveau symbole.

Proposition 3 | Petit o et opérations usuelles pour les fonctions

Soient $f, g, h, a, b : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I), et $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^\star$.

- **[Absorbance]** Soit $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^\star$. Alors :
$$\underset{x \to x_0}{o}(\lambda \times g(x)) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)), \quad \lambda \times \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)).$$
Note : *Une constante λ est donc « absorbée » à l'intérieur ou à l'extérieur du petit o*
- **[Somme]**
$$\begin{cases} f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x)) \\ g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x)) \end{cases} \implies f(x) + g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x)).$$
Note : *Il est très important que ce soit la même fonction h à droite*
- **[Transitivité]**
$$\begin{cases} f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \\ g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x)) \end{cases} \implies f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(h(x)).$$
- **[Valeur absolue]** $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \implies |f(x)| = \underset{x \to x_0}{o}(|g(x)|).$
- **[Multiplication]**
$$\begin{cases} f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(a(x)) \\ g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(b(x)) \end{cases} \implies f(x).g(x) = \underset{x \to x_0}{o}(a(x).b(x)).$$
- **[Exposant]**
  - Si $k \in \mathbb{N}^\star$: $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \implies f(x)^k = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)^k)$.
  - Si $\alpha \in]0, \infty[$ et si les fonctions sont > 0 au voisinage de x_0 :
$$f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)) \implies f(x)^\alpha = \underset{x \to x_0}{o}(g(x)^\alpha).$$

Proposition 4 | Petit o et opérations usuelles pour les suites

Soient $(u_n), (v_n), (w_n), (a_n), (b_n)$ des suites non nulles à partir d'un certain rang et $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^\star$.

- **[Absorbance]** Soit $\lambda x_0 \in \mathbb{R}^\star$. Alors :
$$\underset{n \to \infty}{o}(\lambda \times u_n) = \underset{n \to \infty}{o}(v_n), \quad \lambda \times \underset{n \to \infty}{o}(g(x)) = \underset{n \to \infty}{o}(v_n).$$
Note : *Une constante λ est donc « absorbée » à l'intérieur ou à l'extérieur du petit o*
- **[Somme]**
$$\begin{cases} u_n = \underset{n \to \infty}{o}(w_n) \\ v_n = \underset{n \to \infty}{o}(w_n) \end{cases} \implies u_n + v_n = \underset{n \to \infty}{o}(w_n).$$
Note : *Il est très important que ce soit la même suite v à droite*
- **[Transitivité]**
$$\begin{cases} u_n = \underset{n \to \infty}{o}(v_n) \\ v_n = \underset{n \to \infty}{o}(w_n) \end{cases} \implies u_n = \underset{n \to \infty}{o}(w_n).$$
- **[Valeur absolue]** $u_n = \underset{n \to \infty}{o}(v_n) \implies |u_n| = \underset{n \to \infty}{o}(|v_n|).$
- **[Multiplication]**
$$\begin{cases} u_n = \underset{n \to \infty}{o}(a_n) \\ v_n = \underset{n \to \infty}{o}(b_n) \end{cases} \implies u_n.v_n = \underset{n \to \infty}{o}(a_n.b_n).$$
- **[Exposant]**
  - Si $k \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \underset{n \to \infty}{o}(v_n) \implies u_n^k = \underset{n \to \infty}{o}(v_n^k)$.
  - Si $\alpha \in]0, \infty[$ et si les suites sont > 0 au voisinage à partir d'un certain rang :
$$u_n = \underset{n \to \infty}{o}(v_n) \implies u_n^\alpha = \underset{n \to \infty}{o}(v_n^\alpha).$$

Nous avons vu notamment qu'on ne peut faire de quotients de petit o, en règle générale. Cela est en revanche possible pour des monômes.

Proposition 5 | Règles spécifiques aux monômes de fonctions

Soient n et p deux entiers naturels. Alors :

- **[Multiplication]**
$$\begin{cases} x^n \times \underset{x \to 0}{o}(x^p) = \underset{x \to 0}{o}(x^{n+p}), \\ \dfrac{o_{x \to 0}(x^n)}{x^p} = \underset{x \to 0}{o}(x^{n-p}). \end{cases}$$
- **[Addition]** $\underset{x \to 0}{o}(x^n) + \underset{x \to 0}{o}(x^p) = \underset{x \to x_0}{o}\left(x^{\min(n,p)}\right).$

Proposition 6 | Règles spécifiques aux monômes de suites

Soient p et q deux entiers naturels. Alors :

- **[Multiplication]** $\dfrac{1}{n^p} \times \underset{n \to \infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^q}\right) = \underset{n \to \infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{p+q}}\right)$, $\dfrac{o_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^q}} = \underset{n \to \infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{p-q}}\right).$
- **[Addition]** $\underset{n \to \infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^p}\right) + \underset{n \to \infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^q}\right) = \underset{n \to \infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{\min(p,q)}}\right).$

Le résultat de changement de variable pour les limites et équivalents reste valable pour les petit o.

Proposition 7 | Changement de variable dans un équivalent

- **[Fonctions]** Soient I, J deux intervalles et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) ainsi que $y_0 \in \mathrm{J}$ (ou au bord de J). On considère trois fonctions $f : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} \quad \varphi(x) \xrightarrow[]{x \to x_0} y_0 \\ \textbf{(ii)} \quad f(y) = o_{y \to y_0}(g(y)) \end{cases} \implies f(\varphi(x)) = \underset{x \to x_0}{o}(g(\varphi(x))).$$
- **[Suites]** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites, et (a_n) une suite à valeurs entières telle que $a_n \xrightarrow[]{n \to \infty} \infty$. Alors :
$$u_n = \underset{n \to \infty}{o}(v_n) \implies u_{a_n} = \underset{n \to \infty}{o}\left(v_{a_n}\right).$$

On peut retenir que l'on peut faire des « changements de variable » dans des petits o : ici, poser « $y = \varphi(x)$ », ou dans les suites remplacer « n » par n'importe quelle suite (a_n) tendant vers $+\infty$. Ce résultat de changement de variable permet d'étendre les règles des petit o (Proposition 5).

Corollaire 1 | Règles spécifiques aux monômes de fonctions (en un point quelconque)

Soient n et p deux entiers naturels. Alors :

- **[Multiplication]** $\begin{cases} (x-x_0)^n \times \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^p\right) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^{n+p}\right) \\ \dfrac{\mathrm{o}_{x\to x_0}\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^p} = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^{n-p}\right). \end{cases}$
- **[Addition]** $\underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right) + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^p\right) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^{\min(n,p)}\right).$

2. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

2.1. Définitions

Définition 2 | Développement limité au voisinage de $0 \in \mathbb{R}$

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* 0, ce que l'on note en abrégé « f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ », s'il existe un polynôme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel quxe :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{P}(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}_{=\mathrm{P}(x)} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n). \end{aligned}$$

On dit que :

- $\mathrm{P} = a_0 + a_1 \mathrm{X} + \ldots + a_n \mathrm{X}^n$ est *la partie régulière* du développement limité,
- l'entier n est appelé l'*ordre* du développement limité.

Plus généralement, on définit la notion de développement limité en n'importe quel point.

Définition 3 | Développement limité au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0*, ce que l'on note en abrégé « f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ », s'il existe un polynôme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{P}(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right) \\ &= \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n}_{=\mathrm{P}(x-x_0)} + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

On dit que :

- $\mathrm{P}(\mathrm{X}-x_0) = a_0 + a_1(\mathrm{X}-x_0) + \ldots + a_n(\mathrm{X}-x_0)^n$ est *la partie régulière* du développement limité,
- l'entier n est appelé l'*ordre* du développement limité.

Définition 4 | Développement limité au voisinage de $+\infty$

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$, et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n en* $+\infty$, ce que l'on note en abrégé « f admet un $\mathrm{DL}_n(+\infty)$ », s'il existe un polynôme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, une fonction ε définie au voisinage de $+\infty$ tels que :

$$f(x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \underset{x\to-\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \underbrace{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}_{=\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)} + \underset{x\to-\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

On dit que :

- $x \longmapsto \mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ est *la partie régulière* du développement limité,
- l'entier n est appelé l'*ordre* du développement limité.

2.2. Unicité du développement limité

Proposition 8 | Unicité

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(x_0)$. Alors, ce développement limité est unique.

Corollaire 2 | $\mathrm{DL}_n(0)$ et parité

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$.

- Si f est paire, la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$ n'admet que des termes d'ordres pairs.
- Si f est impaire, la partie régulière de son $\mathrm{DL}_n(0)$ n'admet que des termes d'ordres impairs.

2.3. Développements limités usuels (en $x_0 = 0$)

AUTOUR DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ GÉOMÉTRIQUE. La formule de sommation de termes géométriques est le premier outil nous permettant d'obtenir des développements limités, comme déjà vu en introduction de chapitre.

Théorème 1 | Développement limité géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$

Corollaire 3 | Développement limité géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ \frac{1}{1-x^2} &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-x^2)^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n}\right) \end{aligned}$$

AUTOUR DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EXPONENTIEL : FORMULE DE TAYLOR. Le deuxième outil principal est une formule générale du développement limité dans le cas de fonctions $\mathscr{C}^n$.

Théorème 2 | Formule de TAYLOR-YOUNG

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de x_0. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ donné par la formule :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Corollaire 4 | Développement limité obtenus par TAYLOR-YOUNG

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right) \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n). \end{aligned}$$

PRIMITIVATION ET CONSÉQUENCES. On admet le théorème de primitivation qui suit.

Théorème 3 | Primitivation de développement limité

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de x_0. On suppose que f' admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de la forme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right) \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

Alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(x_0)$ donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\ &= f(x_0) + a_0(x-x_0) + \frac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \\ &\quad + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}\left((x-x_0)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Le théorème précédent permet d'obtenir de nouveaux développements limités.

Proposition 9 | Développements limités obtenus par primitivation

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \\ \arctan x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right). \end{aligned}$$

3. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

3.1. Troncature, Combinaison linéaire & Produit

Proposition 10 | Troncature
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Alors pour tout p vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$, f admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^p).$$

Proposition 11 | Combinaison linéaire
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad \mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].$$

Alors pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \mathrm{P}_n(x) + \mu \mathrm{Q}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Proposition 12 | Produit
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient f et g deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \quad \mathrm{P}_n, \mathrm{Q}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].$$

Alors $f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par :

$$f(x) \times g(x) = \mathrm{R}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

où : R_n est le polynôme $\mathrm{P}_n \times \mathrm{Q}_n$ où l'on a gardé que les termes de degré $\leqslant n$.

Méthode (AN) 8.1 (Faire apparaître une expression dont on connaît le DL)

- *Pour $a \neq 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\dfrac{1}{a+x}$? On connaît celui de $\dfrac{1}{1+x}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise le dénominateur par a :
$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\ln(a+x)$? On connaît celui de $\ln(1+x)$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par a dans le logarithme puis on applique la formule : « $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ » :
$$\ln(a+x) = \ln\left(a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{x}{a}\right).$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* DL(0) *de* $\sqrt{a+x}$? On connaît celui de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par a dans la racine carrée :
$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x}{a}}.$$
- *Pour $a \neq 0$, comment obtenir un* DL(0) *de* e^{a+x} ? On connaît celui de e^x. On applique la formule « $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b$ » :
$$\mathrm{e}^{a+x} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^x.$$

3.2. Composée & Quotient

Méthode (AN) 8.2 (Développement limité d'une composée) Pour obtenir un développement limité de $g = f \circ u$ au voisinage de zéro, on :

1. cherche généralement un développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre n, sous la forme : $f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. On justifie que $u(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ *(Attention à ne pas négliger cette étape! comme pour les équivalents)*
3. Par composition des limites, on a alors : $g(x) = f(u(x)) = \mathrm{P}_n(u(x)) + \underset{x\to 0}{o}(u(x)^n)$, puis en exploitant le développement limité de g on simplifie l'expression précédente jusqu'à obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g = f \circ u$.

Méthode (AN) 8.3 (Développement limité d'un quotient) Le point le plus important à retenir est le suivant : *pour obtenir le développement limité d'un quotient, il faut utiliser la composition avec le développement limité en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$*. Plus précisément :

- pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{g(x)}$ il faut *via* des factorisations obtenir une écriture de la forme $\dfrac{1}{1 \pm f(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Il reste alors à composer le développement limité en 0 de f avec celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$.
- Pour obtenir le développement limité en 0 d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{h(x)}{g(x)}$, on écrit $\dfrac{h(x)}{g(x)} = h(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ et on fait le produit du DL en 0 de h avec celui de $\dfrac{1}{g}$.

3.3. Changement de point

Dans cette sous-section, on explique comment passer d'un développement limité au voisinage de zéro à un développement limité en un point quelconque.

PASSER D'UN POINT FINI À ZÉRO. On ramènera les développements limités au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ à des développements limités au voisinage de 0 avec le changement de variable $h = x - x_0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right) \\ \iff\ & g(h) := f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n). \end{aligned}$$

$h = x - x_0$ $\quad$ $x = x_0 + h$

PASSER D'UN POINT INFINI À ZÉRO. On ramènera les développements limités au voisinage de $+\infty$ à des développements limités au voisinage de 0 avec le changement de variable $h = \dfrac{1}{x}$:

$h = \frac{1}{x}$ $\quad$ $x = \frac{1}{h}$

$$\begin{aligned} & f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ \iff\ & g(h) := f\left(\frac{1}{h}\right) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_n h^n + \underset{h\to 0^+}{o}(h^n). \end{aligned}$$

En résumé, voici la méthode générale.

Méthode (AN) 8.4 (Se ramener à zéro à partir de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

- Si $x_0 \neq 0$ et $x_0 \notin \{\pm\infty\}$, alors la recherche d'un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ pour une fonction f se fera en se ramenant au voisinage de 0 par le changement de variable « $h = x - x_0$ ». Plus précisément,
  1. considérer $g : h \longmapsto f(x_0 + h)$,
  2. faire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de g : on obtient une expression du type
  $$g(h) = \mathrm{R}_n(h) + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$
  avec R_n fonction polynomiale de degré n définie au voisinage de zéro.
  3. Un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de f est alors : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{R}_n(x - x_0) + o((x-x_0)^n)$.
- Si $x_0 = \pm\infty$, alors on fait comme précédemment mais pour la fonction g : $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$

4. APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

4.1. Limites et équivalents

Proposition 13 | « D.L. $\Longrightarrow$ équivalent »
Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f admettant un développement limité au voisinage de x_0. Alors f est équivalente en x_0 au premier terme **non nul** de son $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Remarque 1

- Utiliser les développements limités permet donc de trouver des équivalents de fonctions, et donc de déterminer des limites, que l'on ne pouvait pas traiter jusqu'à présent : si l'on ne peut pas additionner ou composer des équivalents, on peut desormais additionner et composer des développements limités pour ensuite en déduire des équivalents.
- Il faut toutefois prendre garde à l'ordre du développement limité : un ordre trop petit risque de ne donner que des termes nuls, un ordre trop grand conduit à des calculs inutiles.

4.2. Étude locale d'une fonction

Les développements limités vont nous permettre d'étudier localement une fonction : savoir si elle est continue, dérivable, voire même à prolonger des fonctions en un point où elle n'est pas définie, et savoir si le prolongement est continue, dérivable *etc.*.

Proposition 14 | Développement limité, continuité & dérivabilité
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ (f est donc **définie en** x_0).

- f est continue en x_0 $\iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet un } \mathrm{DL}_0(x_0)\text{, c'est-à-dire :} \\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1). \end{array}\right.$

  Dans ce cas : $a_0 = f(x_0)$.
- f est dérivable en x_0 $\iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1(x_0)\text{, c'est-à-dire :} \\ \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0). \end{array}\right.$

  Dans ce cas : $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$.

Attention
Cet énoncé ne se généralise **pas** pour des valeurs supérieures de n.

La proposition précédente permet d'étudier l'existence d'une tangente, mais en poussant le développement limité un peu plus loin on peut même obtenir la position relative.

Proposition 15 | Position relative de la tangente

Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_p(x_0)$, $p \geqslant 2$ et $a_p \neq 0$:

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0)}_{\text{Donne l'équation de la tangente en } x_0} + \underbrace{a_p(x - x_0)^p}_{\text{Donne la position par rapport à la tangente}} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left((x - x_0)^p\right).$$

Note | *a_p désigne donc le premier coefficient non nul du développement limité après l'ordre 2*

Alors, f est continue et dérivable en x_0 (on a $f(x_0) = a_0$ et $f'(x_0) = a_1$) et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T_{x_0} en son point d'abscisse x_0 d'équation $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. De plus,

- Si p est pair : $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)]$ a le signe de a_p au voisinage de x_0, donc $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T_{x_0} si $a_p > 0$, et en-dessous si $a_p < 0$.
- Si p est impair : $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)]$ change de signe au voisinage de x_0, donc $\mathscr{C}_f$ traverse T_{x_0} et on dit que $(x_0, f(x_0))$ est un *point d'inflexion* de $\mathscr{C}_f$.

Les propositions précédentes sont utiles, mais exigent que la fonction soit définie au point où l'on effectue le développement limité, mais les développements limités peuvent aussi servir à prolonger des fonctions comme nous allons le voir.

Proposition 16 | Développement limité et prolongement

Soit $x_0 \in \mathrm{I}$, et $f : \mathrm{I} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ (f est donc non **définie en** x_0). Alors :

- si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, c'est-à-dire :
$$f(x) = a + b(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{\mathrm{o}}(x - x_0), \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},$$
alors la fonction f se prolonge par continuité en x_0, en posant $f(x_0) = a$.
- De plus, la fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0) = b$.

Si on souhaite savoir si la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$, il faut ensuite réaliser par exemple un développement limité de f'.

Méthode (AN) 8.5 (Prolongement à l'aide d'un développement limité) Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 mais *non définie en* x_0.

- Si f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$: $f(x) = a_0 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(1)$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$ et on peut donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.
- Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x - x_0)$, alors on peut donc prolonger f par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$ et la nouvelle fonction ainsi prolongée est dérivable en x_0 puisqu'elle admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, on a alors $f'(x_0) = a_1$.

BILAN DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Voici un bilan des développements limités à connaitre. On indique en en-tête de tableau la méthode pour les obtenir. *Les développements limités indiqués entre parenthèse sont ceux pour lesquels la mémorisation est facultative. Ils se déduisent rapidement des autres par composition.*

OBTENUS PAR FORMULE DE TAYLOR

Formule	Type de développement limité
$\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$	$\mathrm{DL}_n(0)$
$\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)$ $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)$	$\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$
$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$ $= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$	$\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$
$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\prod\limits_{0 \leqslant q < k} (\alpha - q) \right) \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $\left(\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)$ $\left(\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)$	$\mathrm{DL}_n(0)$ $\left(\text{Cas } \alpha = \frac{1}{2}\right)$

DÉVELOPPEMENT LIMITÉ GÉOMÉTRIQUE & CONSÉQUENCES

Formule	Type de développement limité
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $\left(\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-x)^k + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right.$ $\left.= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right)$	$\left(x \leftarrow -x\right)$, $\mathrm{DL}_n(0)$
$\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ $\left(\ln(1-x) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right.$ $\left.= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\right)$	$\left(x \leftarrow -x\right)$, $\mathrm{DL}_n(0)$
$\arctan x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$ $= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)$	$\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$

INCLASSABLE

Formule	Type de développement limité
$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}\left(x^5\right)$	$\mathrm{DL}_5(0)$

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Donner la formule de TAYLOR-YOUNG	*si f est $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0, alors* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$ *si f est $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0, alors* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$	*Ne pas oublier l'hypothèse de classe $\mathscr{C}^n$*
Définition de la négligeabilité d'une fonction par rapport à une autre au voisinage de ∞	*Soient deux fonctions f, g définies au voisinage de a, et telle que g ne s'annule pas au voisine de $+\infty$,* $f(x) = \underset{x\to\infty}{o}(g(x))$ *signifie* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *Soient deux fonctions f, g définies au voisinage de a, et telle que g ne s'annule pas au voisine de $+\infty$,* $f(x) = \underset{x\to\infty}{o}(g(x))$ *signifie* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	
Développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction sinus	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$	*Vérifier à l'aide de la parité*
Développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction cosinus	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$	*Vérifier à l'aide de la parité*
Donner le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x}$	$\frac{x}{1+x} = x\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ $\frac{x}{1+x} = x\left(1 - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) = x - x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$	*Vérifier à l'aide de la parité*
Développement limité à l'ordre 4 de $x \longmapsto \ln(1+x)$ lorsque x est au voisinage de 0	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$	
Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a	$\lim\limits_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie* $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie*	*Savoir expliquer géométriquement ce que cela signifie*