Programme de colles

du 19 au 23/5/2025

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths.
- Cette semaine : les développements limités (merci de prioriser la fin du chapitre c'est-à-dire l'utilisation de développements limités pour prolonger des fonctions), et le début des variables aléatoires (notamment, pas encore de lois usuelles, d'inégalités de concentration et de minimum/maximum de v.a.).

Attention

Dernière colle de l'année ! Je vous remercie pour votre participation.

1. [MATHS] DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

- **Relation petit o.** Définition, propriétés, lien avec l'équivalence.
- **Développement limité.** Définition en un point finie, et en $\pm\infty$. Unicité du développement limité, et parité/imparité. Développements limités usuels : géométrique, formule de Taylor-Young (conséquences : cos, sin, exp *etc.*)
- **Opérations sur les développements limités.** Troncature, combinaison linéaire, produit, composée, quotient (conséquence : développement limité à l'ordre 5 de la tangente). Primitivation. Ramener des problèmes de développement limité au voisinage de zéro à l'aide d'un changement de variable (*i.e.* en définissant une fonction auxiliaire).
- **Application des développements limités.** Recherche d'équivalents. Étude locale d'une fonction (régularité en un point par existence d'un développement limité, équation de la tangente et position relative locale). Prolonger une fonction par continuité en un point à l'aide d'un développement limité, dérivabilité en cas d'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Attention

L'étude des branches infinies n'est plus au programme de BCPST.

2. [MATHS] VARIABLES ALÉATOIRES

Attention

- Quelques généralités sur les variables aléatoires ont été développées en début de chapitre (par exemple la question de cours 4), mais les exercices resteront dans le cadre de variables aléatoires **finies**.

- **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, cas particuliers (finies, discrètes et continues). Opérations sur les variables aléatoires. Loi (comme étant $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{P}(\mathrm{X} \in \mathrm{I})$) et fonction de répartition F_X, fonction d'anti-répartition $1 - \mathrm{F}_\mathrm{X}$. Propriétés analytiques et probabilistes de la fonction de répartition. Condition suffisante pour qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire réelle.
- **Variables aléatoires finies.** Système complet associé à une variable aléatoire finie. Reformulation de la notion de loi pour une variable aléatoire réelle finie : la donnée de $\mathrm{X}(\Omega)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}(\Omega)$. La donnée de la loi est équivalente à la donnée de la fonction de répartition. Définition d'une variable aléatoire par sa loi, *i.e.* une suite positive de somme 1. Propriétés des variables aléatoires finies : opérations, allure de la fonction de répartition, reformulation de l'indépendance.
- **Moments d'une variables aléatoire finie.** Définition de l'espérance, variance, écart-type, moents. Propriétés de l'espérance : positivité, linéarité, croissance. Théorème du transfert et application. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire finie.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner le lien entre la relation « petit o » et l'équivalent $\sim$ pour les fonctions. Rappeler les équivalents usuels sur les fonctions exp et cos. En déduire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de exp et un $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos.
2. Rappeler les développements limités de cos, sin du cours. Montrer, selon deux méthodes, que (cos, sin) est libre dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. *(1ère : celle du chapitre sur les espaces vectoriels, en évaluant en plusieurs x — 2ème : en utilisant les $\mathrm{DL}_1(0)$ de cos et sin et la propriété d'unicité du développement limité)*
3. Citer la formule de Taylor-Young. L'appliquer pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp, et le $\mathrm{DL}_2(1)$ de exp.

4. Définir la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle, et rappeler le graphe d'arctan. Citer les trois conditions sur $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour qu'elle soit la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X. Vérifier ces conditions sur G définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$.

5. Rappeler ce qu'on appelle le système complet d'évènements associé à une variable aléatoire finie. Écrire la formule des probabilités totales associé à ce système complet d'évènements : $\mathbb{P}(B) = \ldots$ pour tout évènement B.

6. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Calculer $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$ pour tout évènement A.

7. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Citer la formule de KÖNIG-HUYGENS et la démontrer.

8. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie, rappeler les formules donnant $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y)$ et $\mathbb{V}(\lambda X + \mu)$.
Donner l'expression de la centrée-réduite $X^\star$ de X, et démontrer qu'elle est effectivement centrée/réduite.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : variables aléatoires au complet et applications linéaires (pour les oraux blancs).