# Chapitre (ALG) 12 Applications linéaires

## Résumé de cours

**Cadre**

**Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir $\mathbb{K}$ sont vrais que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

**Notation** **Ensemble des applications**

Soient E, F deux ensembles. On notera $E^F$ (ou $\mathscr{F}(F,E)$) l'ensemble des applications de F dans E.

## 1. GÉNÉRALITÉS

### 1.1. Définitions & premières propriétés

**Définition 1 | Application linéaire**

Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle *application linéaire de* E *dans* F (parfois aussi *morphisme linéaire*) toute application $u : E \longrightarrow F$ telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

- Lorsque $u(E) \subset E$, *i.e.* pour tout $x \in E$, $u(x) \in E$, on dit que $u$ est un *endomorphisme*.
- Si $F = \mathbb{K}$ alors on dit que $u$ est une *forme linéaire* sur E.

**Attention**

Attention aux confusions de vocabulaire avec les espaces vectoriels : on ne dit surtout pas « $u$ est stable par combinaison linéaire », mais « $u$ transforme les combinaisons linéaires en combinaisons linéaires ».

**Notation**

- $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- On note parfois $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = \mathbb{E}^\star$ l'ensemble des formes linéaires, cet ensemble est appelé *espace dual* de E.

**Proposition 1 | Image du neutre « $0_E \to 0_F$ »**

Soient $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application *linéaire*. Alors : $u(0_E) = 0_F$.

**Méthode (ALG) 12.1 (Montrer qu'une application n'est pas linéaire)** Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, on peut :

- étudier l'égalité $u(0_E) = 0_F$.
- **ou** chercher s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ tels que :
  $u(\lambda x + \mu y) \neq \lambda u(x) + \mu u(y)$.

### 1.2. Opérations

**Définition/Proposition 1 | Opérations sur les applications linéaires**

Soient E, F et G des espaces vectoriels.

1. **[Combinaison linéaire]** Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $u, v : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors on définit :
$$u+v \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x)+v(x), \end{array} \right. \qquad \lambda u \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda u(x), \end{array} \right.$$
et plus généralement : $\lambda u + \mu v \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda u(x) + \mu v(x). \end{array} \right.$
Alors $\lambda u + \mu v \in \mathscr{L}(E,F)$, et $(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un espace vectoriel, d'élément neutre l'application linéaire nulle.
2. **[Composition]** Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors : $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.
3. **[Restriction]** Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors l'application $u|_V \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$ est appelée *application restreinte de u à* V. C'est une application linéaire de V dans F.

**Proposition 2 | Distributivité de la composition**

Soient E, F, G trois espaces vectoriels.

1. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
$$(\lambda v) \circ u = \lambda(v \circ u) = v \circ (\lambda u).$$
2. Soient $u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :
$$v \circ (u_1 + u_2) = (v \circ u_1) + (v \circ u_2).$$
3. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F,G)$, alors :
$$(v_1 + v_2) \circ u = (v_1 \circ u) + (v_2 \circ u).$$

**PUISSANCES & NILPOTENCE.** On se place désormais dans le cas d'endomorphismes, *i.e.* lorsque E = F.

**Définition 2 | Puissances**

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors on définit par récurrence l'endomorphisme $f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ :
$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
En d'autres termes : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

**Remarque 1** On suppose que $f$ est un **endo**morphisme, tout simplement pour que les composées aient un sens. On pourrait faire sans cette hypothèse et supposer plus généralement que $f(E) \subset F$ si $f : E \longrightarrow F$.

La définition de nilpotence est parfaitement analogue à celle vue pour les matrices (Chapitre (ALG) 7).

**Définition 3 | Endomorphisme nilpotent**

Soit E un espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :

- $f$ est dite *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- Dans ce cas, l'*indice de nilpotence* est le plus petit exposant $k$ vérifiant :
  $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

**Proposition 3 | Propriétés de la puissance**

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :
$$f^p \circ f^q = f^{p+q}, \quad (f^p)^q = f^{pq}.$$

**Attention**

En revanche, en règle générale :
$$(f \circ g)^p \neq f^p \circ g^p,$$
sauf si les endomorphismes $f$ et $g$ commutent.

**Théorème 1 | Binôme de NEWTON pour les endomorphismes**

Soient E un espace vectoriel, $f, g$ deux endomorphismes de E **qui commutent**, c'est-à-dire tels que : $f \circ g = g \circ f$. Alors :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k}.$$

**Attention**

L'hypothèse de commutativité est cruciale, comme pour les matrices.

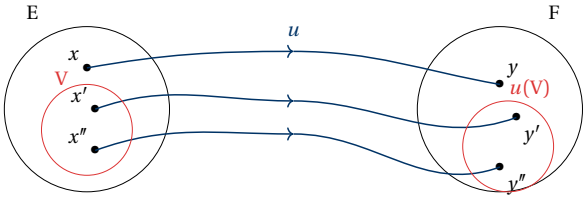
## 2. INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ & BIJECTIVITÉ

### 2.1. Image & Noyau

**Définition/Proposition 2 | Image directe d'un espace vectoriel**

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et V un sous-espace vectoriel de E. Alors :
$$u(V) = \{u(x) \mid x \in V\}, \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\, u \underset{\text{(défi.)}}{=} u(E) = \{u(x) \mid x \in E\}$$
sont des sous-espaces vectoriels de F. *(donc de l'espace d'**arrivée**!)*

- $u(V)$ est l'image directe de V par $u$, c'est le sous-espace vectoriel **de** F constitué des vecteurs qui sont l'image d'un vecteur de V par $u$. On a de plus :
  $$y \in u(V) \iff \exists x \in V, \quad y = u(x).$$
- $\mathrm{Im}\, u = u(E)$ est appelée *image de* $u$, c'est le sous-espace vectoriel **de** F constitué des vecteurs qui sont l'image d'un vecteur de E par $u$. On a de plus :
  $$y \in \mathrm{Im}\, u \iff \exists x \in E, \quad y = u(x).$$



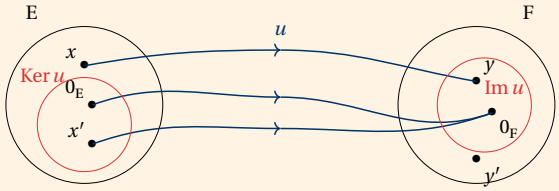

$u(\mathrm{V}) = \{y', y''\}$

**Définition/Proposition 3 | Noyau**

- On appelle *noyau* de $u$, et on le note $\operatorname{Ker} u$, l'ensemble :
$$\operatorname{Ker} u = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = 0_{\mathrm{F}}\}. \quad \text{Ainsi : } x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_{\mathrm{F}}.$$
- C'est le sous-espace vectoriel **de** E constitué des vecteurs ayant $0_{\mathrm{F}}$ pour image par $u$.

**Résumé Qui est dans quoi ?**

On retient donc :
- le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de **départ**,
- l'image est un sous-espace vectoriel de l'espace d'**arrivée**.




Sur cet exemple : $\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathrm{E}}, x'\}$, $\operatorname{Im} u = \{0_{\mathrm{F}}, y\}$

**Proposition 4 | Lien avec l'injectivité/surjectivité**

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors :
- $u$ est injective $\iff \operatorname{Ker} u = \{0_{\mathrm{E}}\} \iff \dim \operatorname{Ker} u = 0$
- $u$ est surjective $\iff \operatorname{Im} u = \mathrm{F} \underset{(\text{si } \dim \mathrm{F} < \infty)}{\iff} \dim \operatorname{Im} u = \dim \mathrm{F}$.

**Proposition 5 | Image directe d'un « Vect »**

Soient E et F des espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :
$$u\left(\operatorname{Vect}(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}\right) = \operatorname{Vect}(u(x_k))_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$
En particulier, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice finie de E, alors :
- $(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$, c'est-à-dire :
$$\operatorname{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \operatorname{Im} u.$$
C'est en particulier le cas si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base.
- Par conséquent, $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.

## 2.2. Isomorphismes

**Définition 4 | Isomorphisme, Automorphisme**

- On appelle *isomorphisme* entre deux espaces vectoriels E et F toute application linéaire bijective de E dans F, dans ce cas on dit que E et F sont isomorphes.
- On appelle *automorphisme* de E tout endomorphisme bijectif de E, c'est donc un isomorphisme de E dans E.

**Définition 5 | Groupe linéaire GL(E)**

Soit E un espace vectoriel, l'ensemble des automorphismes linéaires de E est noté GL(E), et appelé *groupe linéaire sur* E.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| morphisme | = | application linéaire | | | | |
| ENDOmorphisme | = | application linéaire | + | ENTRE MÊMES ESPACES | | |
| ISOmorphisme | = | application linéaire | + | BIJECTIVE | | |
| AUTOmorphisme | = | application linéaire | + | BIJECTIVE | + | ENTRE MÊMES ESPACES |

**Proposition 6 | Linéarité de l'inverse**

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Si $u$ est un isomorphisme, alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ est un isomorphisme.

**Proposition 7 | Composée d'isomorphismes = isomorphisme**

Soient $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $v : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux isomorphismes d'espaces vectoriels. Alors :
- $v \circ u$ est un isomorphisme de E dans G,
- et : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$.

Note | *Attention, l'ordre est inversé, comme pour la formule analogue aux matrices.*

**Corollaire 1 | Puissance d'inverse**

Soit $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ un automorphisme d'un espace vectoriel. Alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (u^k)^{-1} = (u^{-1})^k.$$

## 2.3. Cas particulier de la dimension finie

### 2.3.1. Nature d'une base image

**Théorème 2 | Image d'une base**

Soient :
- E un espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ et de **base** $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- F un espace vectoriel, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Alors les natures de $u$ et de la famille $u(\mathscr{B})$ sont reliées ainsi :
$$u \text{ est injective} \underset{\text{(i)}}{\iff} u(\mathscr{B}) \text{ est une famille libre de F}$$
$$u \text{ est surjective} \underset{\text{(ii)}}{\iff} u(\mathscr{B}) \text{ est une famille génératrice de F}$$
$$u \text{ est un isomorphisme} \underset{\text{(iii)}}{\iff} u(\mathscr{B}) \text{ est une base de F}$$

**Corollaire 2 | Dimension d'espaces vectoriels isomorphes**

Soient E, F deux espaces vectoriels, et $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$.
$$\begin{cases} \text{(i)} & \dim \mathrm{E} < \infty, \\ \text{(ii)} & u \text{ isomorphisme} \end{cases} \implies \dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}.$$

**Théorème 3 | Construction d'une application linéaire à l'aide d'une base**

Soient :
- E un espace vectoriel de dimension finie non nulle $n$ et de **base** $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- F un espace vectoriel, et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille **quelconque** de $n$ vecteurs de F.

Alors :
- **[Existence/Unicité]** $\exists ! \, u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}), \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i$.
- **[Expression analytique]** $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$.

**Méthode (ALG) 12.2 (Construction d'applications linéaires à l'aide d'une base)** À la question « construisez une application linéaire entre E et F », si vous connaissez une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, vous pouvez répondre :
$$\text{je pose } u(e_1) = \mathrm{Truc}_1 \in \mathrm{F}, \quad \dots, \quad \text{je pose } u(e_n) = \mathrm{Truc}_n,$$
en découlera alors automatiquement $u(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ par linéarité.

### 2.3.2. Rang

**Définition 6 | Rang d'une application linéaire**

Soient E et F des espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
- On dit que $u$ est *de rang fini* si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie.
- On appelle alors *rang de* $u$, et on note $\operatorname{Rg}(u)$, l'entier :
$$\operatorname{Rg}(u) = \dim(\operatorname{Im} u) = \dim(\{u(x) \mid x \in \mathrm{E}\}).$$

Le théorème qui suit, très utile en pratique, permet en pratique de trouver la dimension de l'image à partir de celle du noyau.

**Théorème 4 | Théorème du rang**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel de dimension quelconque, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors $u$ est de rang fini et :
$$\dim \mathrm{E} = \operatorname{Rg} u + \dim \operatorname{Ker} u.$$

Note | *Bien mettre la dimension de l'espace de **départ** dans le membre de droite.*

**Méthode (ALG) 12.3 (Montrer (plus efficacement) qu'une application est un isomorphisme)** Soit $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie tels que : $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.
1. On montre que $f$ est injective, c'est-à-dire : $\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
2. On applique le théorème du rang :
$$\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{Rg} u \iff \dim \mathrm{F} = 0 + \operatorname{Rg} u$$
car $u$ est injective et $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$.
3. On obtient donc $\operatorname{Rg} u = \dim \mathrm{F}$, c'est-à-dire que $u$ est surjective.

Le même raisonnement s'applique si on a d'abord montré la surjectivité (plus rare).

**Méthode (ALG) 12.4 (Trouver une base de l'image et du noyau)** Soit $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire.
- *Pour le noyau :* on calcule explicitement l'ensemble puis on en cherche une base.

- *Pour l'image :* le calcul explicite est souvent non-trivial, on utilise donc la Proposition 5.
  1. On commence donc par chercher une famille génératrice $\mathscr{G}$ de l'ensemble de départ E.
  2. On calcule les images de chacun des vecteurs de $\mathscr{G}$, la famille $u(\mathscr{G})$ est alors génératrice de F.
  3. Si l'on souhaite une base, on cherche à extraire une sous-famille libre formée de $\operatorname{Rg} u$ vecteurs. Le rang se calcule facilement en exploitant le noyau et le théorème du rang. Pour éliminer les vecteurs du Vect, on peut par exemple échelonner la matrice de la famille pour deviner des combinaisons linéaires (voir le Chapitre (ALG) 11).

## 3. REPRÉSENTATION MATRICIELLE

### 3.1. Matrice d'une application linéaire

Formalisons le constat précédent dans une définition.

**Définition 7 | Matrice d'une application linéaire**
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $p = \dim \mathrm{E}$, $n = \dim \mathrm{F}$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On appelle :
- *matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :
$$\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \underset{\text{(défi.)}}{=} \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(\mathscr{B})) = \left( \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(e_1)) \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}\big(u(e_p)\big) \right) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$
- Lorsque E et F disposent d'une base canonique, et que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont les bases canoniques associées, on dit que $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est la *matrice canoniquement associée à u*.

On retiendra donc que :

| | | |
|---|---|---|
| nombre de LIGNES | = | dimension de l'espace d'ARRIVÉE |
| nombre de COLONNES | = | dimension de l'espace de DÉPART |

**Théorème 6 | La matrice dans deux bases caractérise l'application**
Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions respectives $p$ et $n$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F. Alors l'application
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) \end{array} \right.$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier,
- $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) = n \times p$.
- Étant données deux bases $\mathscr{B}$ de E et $\mathscr{C}$ de F fixées, il y a une correspondance bijective entre les matrices de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et les applications linéaires de E dans F. Et : $\forall (u,v) \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})^2, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,$
  - $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\lambda u + \mu v) = \lambda \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) + \mu \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(v)$ *(le symbole « Mat » est donc linéaire)*
  - $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(v) \iff u = v$.

**Définition/Proposition 4 | Application associée à une matrice**
Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions respectives $p$ et $n$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F.
- Pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u$ appelé *application associée à* M *dans* $(\mathscr{B},\mathscr{C})$ telle que : $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{M}$.
- Lorsque $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$, $\mathrm{F} = \mathbb{R}^n$, et $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ leur base canonique, on dit que $u$ vérifiant $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u) = \mathrm{M}$ est l'*application linéaire canoniquement associée à* M.

**Définition 8 | Noyau et image d'une matrice**
On appelle *noyau de la matrice* M noté $\operatorname{Ker}\mathrm{M}$ (*resp. image de la matrice* M noté $\operatorname{Im}\mathrm{M}$) les ensembles :
- $\operatorname{Ker}\mathrm{M} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \;\middle|\; \mathrm{MX} = 0 \right\}$
- $\operatorname{Im}\mathrm{M} = \left\{ \mathrm{MX} \;\middle|\; \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \right\} \left( \mathrm{Y} \in \operatorname{Im}\mathrm{M} \iff \exists \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{MX} = \mathrm{Y} \right)$.

**Remarque 2 (Théorème du rang matriciel)** Considérons :
$$v \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{MX}, \end{array} \right. \quad \text{alors par définition on a :}$$
$$\operatorname{Ker}\mathrm{M} = \operatorname{Ker} v, \quad \operatorname{Im}\mathrm{M} = \operatorname{Im} v.$$
En appliquant le théorème du rang à $v$ (qui est bien linéaire), on obtient un théorème du rang adapté aux matrices :
$$\text{(le nombre de colonnes de M)} \quad \boxed{p = \dim \operatorname{Ker}\mathrm{M} + \operatorname{Rg}\mathrm{M}.}$$

Plus précisément, si l'on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$, alors la $i$-ième colonne (pour $i \in [\![1, p]\!]$) contient les coordonnées de $u(e_i)$ relativement à la base $\mathscr{C}$.

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} f_i \qquad \mathrm{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \star & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \star \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \star & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \star \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array}$$

**Notation Cas d'un endomorphisme**
Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ alors la matrice de l'endomorphisme $u$ relativement à $\mathscr{B}$ est :
$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \underset{\text{(nota.)}}{=} \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K}).$$
Dans ce cas, c'est une matrice carrée de format $n \times n$.

Le fait de représenter une application linéaire à l'aide d'une matrice permet de calculer de manière très efficace son rang, voyons le résultat principal (qui relie par ailleurs toutes les définitions de rang rencontrées précédemment).

**Théorème 5 | Rang et matrice**
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies, $p = \dim \mathrm{E}$, $n = \dim \mathrm{F}$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors $u$ est de rang fini et :
$$\underbrace{\operatorname{Rg}(u)}_{\text{« rang d'une application »}} = \underbrace{\operatorname{Rg}(u(\mathscr{B}))}_{\text{« rang d'une famille Chapitre (ALG) 11 »}}$$
$$= \underbrace{\operatorname{Rg}(\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(\mathscr{B})))}_{\text{« rang d'une matrice Chapitre (ALG) 7 »}}. = \operatorname{Rg}\left(\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)\right).$$

**Méthode (ALG) 12.5 (Calculer une matrice)** Pour déterminer $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$, il faut donc :
1. calculer les vecteurs de $u(\mathscr{B})$, *i.e.* les $u(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.
2. Calculer ensuite les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base image $\mathscr{C}$, *i.e.* chercher les $\lambda_{i,j}$ tels que : $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} f_i$.
3. Conclure : la $j$-ème colonne de $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)$ sera donc : $\begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$.

### 3.2. Opérations endomorphiques & opérations sur les matrices

**Théorème 7 | Écriture matricielle de $y = u(x)$**
Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $x \in \mathrm{E}$. Alors :
$$\underbrace{\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u(x))}_{\text{« matrice d'un vecteur »}} = \underbrace{\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u)}_{\text{« matrice d'une app. »}} \times \underbrace{\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x)}_{\text{« matrice d'un vecteur »}}.$$

**Théorème 8 | Matrice d'une composée**
Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies, et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F, $\mathscr{B}''$ une base de G, soient $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.
Alors : $\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}''}{\mathrm{Mat}}(u \circ v) = \underset{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}{\mathrm{Mat}}(u) \times \underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{\mathrm{Mat}}(v)$.

Note : *$\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}''$) est donc la base de **départ** (resp. d'**arrivée**) de la composée. En cas de trou de mémoire, on replace correctement les bases en suivant les flèches.*

On déduit le corollaire suivant par récurrence immédiate sur $n$.

**Corollaire 3 | Matrice d'une puissance**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E. Alors : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u^n) = \left[\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)\right]^n$

On en déduit maintenant facilement que la matrice de $u^{-1}$, si $u$ est un isomorphisme, est l'inverse de la matrice de $u$.

**Corollaire 4 | Matrice d'une application inverse**
Soient E un espace vectoriel de dimension $n$, $\mathscr{B}$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E.
- Alors : $u$ est inversible $\iff \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est inversible.
- Dans ce cas, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u^{-1}) = \left[\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)\right]^{-1}$.

## FICHE MÉTHODES

*Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.*

**Méthode (ALG) 12.1 (Montrer qu'une application n'est pas linéaire)** Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, on peut :
- étudier l'égalité $u(0_E) = 0_F$.
- **ou** chercher s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ tels que :
  $u(\lambda x + \mu y) \neq \lambda u(x) + \mu u(y)$.

**Méthode (ALG) 12.2 (Construction d'applications linéaires à l'aide d'une base)** À la question « construisez une application linéaire entre E et F », si vous connaissez une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, vous pouvez répondre :

je pose $u(e_1) = \text{Truc}_1 \in F$, …, je pose $u(e_n) = \text{Truc}_n$,

en découlera alors automatiquement $u(x)$ pour tout $x \in E$ par linéarité.

**Méthode (ALG) 12.3 (Montrer (plus efficacement) qu'une application est un isomorphisme)** Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie tels que : $\dim E = \dim F$.
1. On montre que $f$ est injective, c'est-à-dire : $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
2. On applique le théorème du rang :
   $$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{Rg} u \iff \dim F = 0 + \operatorname{Rg} u$$
   car $u$ est injective et $\dim E = \dim F$.
3. On obtient donc $\operatorname{Rg} u = \dim F$, c'est-à-dire que $u$ est surjective.

Le même raisonnement s'applique si on a d'abord montré la surjectivité (plus rare).

**Méthode (ALG) 12.4 (Trouver une base de l'image et du noyau)** Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
- *Pour le noyau :* on calcule explicitement l'ensemble puis on en cherche une base.
- *Pour l'image :* le calcul explicite est souvent non-trivial, on utilise donc la Proposition 5.
  1. On commence donc par chercher une famille génératrice $\mathscr{G}$ de l'ensemble de départ E.
  2. On calcule les images de chacun des vecteurs de $\mathscr{G}$, la famille $u(\mathscr{G})$ est alors génératrice de F.
  3. Si l'on souhaite une base, on cherche à extraire une sous-famille libre formée de $\operatorname{Rg} u$ vecteurs. Le rang se calcule facilement en exploitant le noyau et le théorème du rang. Pour éliminer les vecteurs du Vect, on peut par exemple échelonner la matrice de la famille pour deviner des combinaisons linéaires (voir le Chapitre (ALG) 11).

**Méthode (ALG) 12.5 (Calculer une matrice)** Pour déterminer $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{Mat}}(u)$, il faut donc :
1. calculer les vecteurs de $u(\mathscr{B})$, *i.e.* les $u(e_j)$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.
2. Calculer ensuite les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base image $\mathscr{C}$, *i.e.* chercher les $\lambda_{i,j}$ tels que : $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} f_i$.
3. Conclure : la $j$-ème colonne de $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\operatorname{Mat}}(u)$ sera donc : $\begin{pmatrix} \lambda_{1,j} \\ \vdots \\ \lambda_{n,j} \end{pmatrix}$.



## QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

| Question | Réponse | Commentaire |
|---|---|---|
| Donner la définition d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E | Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$. | |
| Définition du noyau d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ | $\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E (l'ensemble de départ) | *Savoir que* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ *caractérise l'injectivité mais uniquement pour les applications* ***linéaires*** |
| Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ | Si $\dim E < \infty$, alors $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{Rg} f$ | *Ne pas oublier* ***l'hypothèse*** $\dim E$ ***finie****, et ne pas mélanger ensemble de départ et d'arrivée* |
| Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective | $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ | *Ici $f$ est linéaire, mais ne surtout pas dire que c'est équivalent à la surjectivité (pas d'hypothèse de dimension finie)* |
| Définition de la matrice d'un endomorphisme $f$ de E dans une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E | La matrice de $j$-ième colonne ($j \in [\![1, \dim E]\!]$) la matrice de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$ | |