Interrogation de Mathématiques

du 15 au 19/9/2025

Nom : Louise. **Prénom :** CORRECTION

Consignes

- En Mathématiques, les énoncés du cours doivent être complètement écrits : un cadre, des hypothèses et une conclusion.
- En Informatique : les scripts doivent être correctement indentés, en mettant en valeur l'indentation à l'aide d'une barre verticale.
- La note finale tiendra compte, directement ou indirectement, de la qualité de la rédaction et de la présentation.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**

/ 18

NOMBRES RÉELS

1. / 1 Définir la racine cubique de x appartenant à un ensemble à préciser.

L'unique réel $\sqrt[3]{x}$ vérifiant :

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

2. / 2 Énoncer l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

3. / 2 Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel x.

L'unique $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \ / \ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

4. / 1 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Définir, à l'aide de quantificateurs, la proposition logique « A est majorée ».

$\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall a \in A, \ a \leq M$

5. Donner un exemple :

5.1) / 1 de partie de $\mathbb{R}$ bornée admettant un plus petit élément mais pas de plus grand élément :

$[0, 1[$

5.2) / 1 de partie de $\mathbb{R}$ minorée non majorée :

$[0 ; \infty[$

6. / 1 Qu'appelle-t-on la borne supérieure d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée?

Le plus petit des majorants

TRIGONOMÉTRIE

7. [/2] Soient x, y deux réels. Compléter les formules d'addition du cosinus et du sinus suivantes :

- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

8. [/1.5] Énoncer les trois versions de la formule de duplication du cosinus.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$

9. [/2] Définir la tangente d'un réel $x \in \mathbb{R}$, en cas d'existence. On précisera donc le domaine $\mathscr{D}_{\tan}$ sur lequel $\tan x$ est défini.

$$\mathscr{D}_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

10. [/2] Si a est un réel fixé quelconque, rappeler les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{a + 2k\pi ; \pi - a + 2k\pi\}$$

11. [/1.5] Écrire $\underbrace{\cos(x) - \sin(x)}_{E(x)}$ sous la forme d'un cosinus (transformation de FRESNEL).

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$E(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)$$
$$= \boxed{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$