

Interrogation de Mathématiques

du 15 au 19/9/2025

Nom :

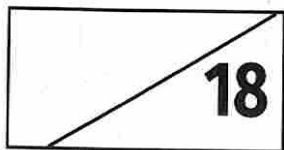
Louise.

Prénom :

CORRECTION

Consignes

- En Mathématiques, les énoncés du cours doivent être complètement écrits : un cadre, des hypothèses et une conclusion.
- En Informatique : les scripts doivent être correctement indentés, en mettant en valeur l'indentation à l'aide d'une barre verticale.
- La note finale tiendra compte, directement ou indirectement, de la qualité de la rédaction et de la présentation.
- Le crayon à papier ne sera pas corrigé.
- L'usage de la calculatrice est interdit.



NOMBRES RÉELS

1. 1 Définir la racine cubique de x appartenant à un ensemble à préciser.

L'unique réel $\sqrt[3]{x}$ vérifiant :

$$(\sqrt[3]{x})^3 = x$$

2. 2 Énoncer l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

3. 2 Donner la définition de la partie entière d'un nombre réel x .

L'unique $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} / \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

4. 1 Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . Définir, à l'aide de quantificateurs, la proposition logique « A est majorée ».

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$

5. Donner un exemple :

- 5.1) 1 de partie de \mathbb{R} bornée admettant un plus petit élément mais pas de plus grand élément :

$[0, 1[$

- 5.2) 1 de partie de \mathbb{R} minorée non majorée :

$[0; \infty[$

6. 1 Qu'appelle-t-on la borne supérieure d'une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée?

Le plus petit des majorants

TRIGONOMÉTRIE

7. 2 Soient x, y deux réels. Compléter les formules d'addition du cosinus et du sinus suivantes:

$$\bullet \cos(x-y) = \dots \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \dots$$

$$\bullet \sin(x+y) = \dots \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \dots$$

8. 1.5 Énoncer les trois versions de la formule de duplication du cosinus.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$= 2\cos^2(x) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2(x)$$

9. 2 Définir la tangente d'un réel $x \in \mathbb{R}$, en cas d'existence. On précisera donc le domaine \mathcal{D}_{\tan} sur lequel $\tan x$ est défini.

$$\mathcal{D}_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

10. 2 Si a est un réel fixé quelconque, rappeler les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi$$

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ a + 2k\pi; \pi - a + 2k\pi \right\}$$

11. 1.5 Écrire $\cos(x) - \sin(x)$ sous la forme d'un cosinus (transformation de FRESNEL).

$$\begin{pmatrix} a=1 \\ b=-1 \end{pmatrix} \quad \rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$E(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) \right)$$

$$= \boxed{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$