Devoir surveillé n°1
Le 03/10/2025 – Durée : 3 heures

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousses sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entrainent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
  - variables non quantifiées *(utiliser les symboles $\forall, \exists$, etc. appropriés.)*
  - confusion entre égalité = et équivalence $\iff$,
  - « la fonction $f(x)$ »,
  - un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Questions de cours Agro-Véto

1. Somme et produit des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.
2. Donner la définition de fla partie entière d'un réel x.
3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 2 | Un peu de calculs [Solution]

1. Écrire sous la forme $2^p \times 3^q$ avec p et q deux entiers relatifs :
$$A = \frac{\left(\frac{8}{27}\right)^4 \times 2^7 \times (-3)^8}{(9 \times 2^{-3})^{-4}}, \qquad B = \frac{7 \times 3^{18} + 3^{20}}{5 \times 3^{23} - 3^{24}}.$$
2. **2.1)** Écrire le nombre $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{147}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier naturel et b un entier naturel *le plus petit possible.*

   2.2) Écrire sans racine carrée au dénominateur le nombre : $D = \frac{2}{5-\sqrt{3}}$.

   2.3) Calculer : $E = \left(\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$.

Exercice 3 | Equations et inéquations [Solution]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in-)équations suivantes.

1. $\sqrt{3-3x} = 2x + 1$
2. $x - 1 \geqslant \frac{1}{x-1}$
3. $|1-x| = 2x - 3$
4. $\frac{2\sin(3x)}{\sqrt{3}} = 1$
5. $\lfloor \ln(x-2) + \ln(x+2) \rfloor = 0$.

Exercice 4 | [Solution]

1. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}. \end{cases}$

   1.1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

   1.2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{2n+1}$.

   1.3) Écrire une fonction `calcul_u(n)` qui pour un entier $n \in \mathbb{N}$ renvoie la valeur de u_n.

2. On considère la suite (v_n) définie par :
$$\begin{cases} v_0 = 2, \quad v_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n. \end{cases}$$
Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n + (-1)^n.$

Problème 1 | Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Solution Dans toute la suite, on note $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. On rappelle que la tangente de x, notée $\tan(x)$, est la quantité définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout $x \in \mathscr{D}_{\tan}$.

Le but de cet exercice est de calculer *(dans cet ordre)* les valeurs de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie I — Préliminaires

1. Justifier que : $\quad \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$, et que $\quad \sqrt{5} > 2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\;(\mathrm{E}_1) \quad t^4 - 10t^2 + 5 = 0$. *On posera* $\;\mathrm{X} = t^2$.

3. Soit $x \in \mathscr{D}_{\tan}$.

3.1) Exprimer $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

3.2) En déduire que : $\;\tan(-x) = -\tan(x)$.

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ soient bien définis, c'est-à-dire tel que : $\quad \cos a \neq 0, \quad \cos b \neq 0, \quad \cos(a+b) \neq 0.$

4.1) Rappeler les formules d'addition $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\sin(a)$, $\cos(b)$ et $\sin(b)$.

4.2) Démontrer que : $\quad \tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

Dans toute la suite, les résultats de la partie précédente pourront être bien sûr utilisés, même s'ils n'ont pas complètement été établis.

Partie II — Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

5. Soit (E_2) l'équation : $\quad \tan(2x) + \tan(3x) = 0$.

5.1) Sur quel ensemble cette équation est-elle définie ?

5.2) La résoudre sur cet ensemble. *On pourra chercher à se ramener à une équation s'écrivant sous la forme* $\tan(\ldots) = \tan(\ldots)$ *à l'aide de la question **3.2)**.*

5.3) Préciser les solutions de l'équation appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

6. On pose $t = \tan(x)$, où x est un réel tel que $\tan(x)$, $\tan(2x)$ et $\tan(3x)$ sont définis. *On rappelle que les résultats de la partie préliminaire peuvent être utilisés même s'ils n'ont pas été établis.*

6.1) Vérifier que : $\quad \tan(2x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

6.2) Montrer que : $\quad \tan(3x) = \frac{t(3-t^2)}{1-3t^2}$.

6.3) Montrer que : $\quad (\mathrm{E}_2) \iff t = \tan(x) \;$ et $\; t^5 - 10t^3 + 5t = 0$.

7. On admet que $0 < \tan\left(\frac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Déduire des questions précédentes que :
$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Partie III — Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

8. 8.1) Que vaut $\cos^2(x) + \sin^2(x)$ pour tout nombre réel x ?

8.2) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$.

8.3) En déduire que : $\quad \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$

8.4) Montrer enfin que : $\quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Fin du sujet

Correction
Devoir surveillé n° 1
Le 03/10/2025 – Durée : 3 heures

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. On a :

$$A = \frac{\left(\frac{8}{27}\right)^4 \times 2^7 \times (-3)^8}{(9\times 2^{-3})^{-4}} = \frac{\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4 \times 2^7 \times 3^8}{(3^2\times 2^{-3})^{-4}} = \frac{2^{12}\cdot 3^{-12}\cdot 2^7\cdot 3^8}{3^{-8}2^{12}} = \frac{2^{19}}{2^{12}}\cdot\frac{3^{-4}}{3^{-8}} = \boxed{2^7 3^4}$$

$$B = \frac{7\times 3^{18}+3^{20}}{5\times 3^{23}-3^{24}} = \frac{3^{18}\left(7+3^2\right)}{3^{23}(5-3)} = 3^{-5}\cdot\frac{16}{2} = 3^{-5}\cdot 8 = \boxed{3^{-5}2^3}.$$

2. **2.1)** On a :

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{147} \\ &= \sqrt{9\times 3} - 2\sqrt{4\times 3} + \sqrt{49\times 3} \\ &= 3\sqrt{3} - 2\times 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} \\ &= \boxed{6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2.2) $D = \frac{2}{5-\sqrt{3}} = \frac{2\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(5+\sqrt{3}\right)}{25-3} = \boxed{\dfrac{5+\sqrt{3}}{11}}$

2.3) On a :

$$\begin{aligned} E &= \left(\sqrt{6+\sqrt{11}} + \sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2 \\ &= 6 + \cancel{\sqrt{11}} + 2\sqrt{6+\sqrt{11}}\sqrt{6-\sqrt{11}} + 6 - \cancel{\sqrt{11}} && (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ &= 12 + 2\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)\left(6-\sqrt{11}\right)} && \text{Relation } \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} \\ &= 12 + 2\sqrt{36-11} && (a-b)(a+b) = a^2-b^2 \\ &= 12 + 2\sqrt{25} \\ &= 12 + 2\times 5 \\ &= \boxed{22}. \end{aligned}$$

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. Notons (E_1) : $\sqrt{3-3x} = 2x+1$. On résout (E_1) sur $\mathscr{D}_1$, avec :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1 &= \{x\in\mathbb{R} \mid 3-3x \geq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid x \leq 1\} =]-\infty, 1]. \end{aligned}$$

- **[Cas 1]** Si $2x+1<0$, *i.e.* si $x < -\frac{1}{2}$, l'équation n'admet pas de solution par positivité d'une racine carrée.
- **[Cas 2]** Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} (E_1) &\iff 3-3x = (2x+1)^2 \\ &\iff 3-3x = 4x^2+4x+1 \\ &\iff 4x^2+7x-2 = 0. \end{aligned}$$

On peut constater que -2 est racine évidente. La seconde α vérifie : $2\alpha = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Donc $\alpha = \frac{1}{4}$. Seule la solution $\frac{1}{4}$ est dans le domaine de résolution de l'équation.

Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$.

2. Notons (I_1) : $x-1 \geqslant \frac{1}{x-1}$. On résout (I_1) sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$$\begin{aligned} (I_1) &\iff x-1-\frac{1}{x-1} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-1)^2-1}{x-1} \geq 0 && \text{car } a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \\ &\iff \frac{x(x-2)}{x-1} \geq 0. \end{aligned}$$

On construit donc un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$-$		$+$	0	$+$	
$\frac{x(x-2)}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'où : $\boxed{\mathscr{S} = [0, 1[\cup [2, +\infty[}$.

3. Notons (E_2) : $|1-x| = 2x-3$. On résout (E_2) sur $\mathbb{R}$.

- **[Cas 1]** Si $x \leqslant 1$ alors $1-x \geq 0$, d'où :
$$(E_1) \iff 1-x = 2x-3 \iff x = \frac{4}{3}.$$
Cette valeur est incompatible avec $x \leq 1$, donc $\mathscr{S}_{\leqslant 1} = \emptyset$.
- **[Cas 2]** Si $x > 1$, alors $1-x<0$, d'où :
$$(E_1) \iff x-1 = 2x-3 \iff x = 2.$$
Donc : $\mathscr{S}_{>1} = \{2\}$.

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \{2\}}$.

4. Notons (E_3) : $\frac{2\sin(3x)}{\sqrt{3}} = 1$. On résout (E_3) sur $\mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}(E_3) &\iff \sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k\in\mathbb{Z},\ 3x = \pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k\in\mathbb{Z},\ x = \frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\end{aligned}$$
D'où : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

5. $x\in\mathscr{D}_r \iff \begin{cases} x-2 & >0\\ x+2 & >0\end{cases} \iff x>2$. Donc $\mathscr{D}_r =]2,\infty[$. De plus, l'équation est équivalente à :
$$\begin{aligned}\lfloor\ln((x-2)(x+2))\rfloor = 0 &\iff \lfloor\ln(x^2-4)\rfloor = 0\\ &\iff 0\leqslant\ln(x^2-4)<1 \quad \text{exp } \textit{strictement croissante}\\ &\iff 1\leqslant x^2-4<\mathrm{e}\\ &\iff 5\leqslant x^2<\mathrm{e}+4 \quad \textit{fonction racine carrée strictement croissante}\\ &\iff \sqrt{5}\leqslant|x|<\sqrt{\mathrm{e}+4}.\end{aligned}$$
On déduit alors :
$$\mathscr{S} = \left(\left]-\sqrt{\mathrm{e}+4},-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5},\sqrt{\mathrm{e}+4}\right[\right)\cap]2,\infty[= \boxed{\left[\sqrt{5},\sqrt{\mathrm{e}+4}\right[},$$
puisque $\sqrt{5}>2$.

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. 1.1) En utilisant la définition de la suite, on a
$$\begin{cases} u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{2}{1+2} = \boxed{\frac{2}{3}},\\ u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \boxed{\frac{2}{5}},\\ u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \boxed{\frac{2}{7}}\end{cases}$$

1.2) **Initialisation.** $\frac{2}{2\times 0+1} = \frac{2}{1} = 2 = u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $u_n = \frac{2}{2n+1}$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$, et montrons que $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$. on a :
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{2}{2n+3}.$$
D'où le résultat par le principe de récurrence :
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{2}{2n+1}}.$$

1.3)
```python
def calcul_u(n):
    u = 2 # premier terme
    for _ in range(1, n+1):
        u = u/(1+u)
    return u
```
```
>>> calcul_u(0)
2
>>> calcul_u(3)
0.28571428571428575
>>> 2/7
0.2857142857142857
```

2. On prouve le résultat par récurrence double.

Initialisation. Pour $n=0$: $2^0+(-1)^0 = 1+1 = 2 = v_0$ d'une part. D'autre part $2^1+(-1)^1 = 2-1 = 1 = v_1$.

Hérédité. Supposons que $v_n = 2^n+(-1)^n$ et $v_{n+1} = 2^{n+1}+(-1)^{n+1}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $v_{n+2} = 2^{n+2} + (-1)^{n+2}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= v_{n+1} + 2v_n \\ &= 2^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2\left(2^n + (-1)^n\right) \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= 2^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2^{n+1} + 2(-1)^n \\ &= 2 \times 2^{n+1} + (-1)^n((-1)+2) \\ &= 2^{n+2} + (-1)^n = 2^{n+2} + (-1)^n, \end{aligned}$$

puisque n et $n+2$ ont même parité. Par principe de récurrence double, on a donc montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2^n + (-1)^n.}$$

Solution (problème 1) [Énoncé]

Partie I — Préliminaires

1. On a $\sqrt{80} = \sqrt{4 \times 20} = \sqrt{4^2 \times 5} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{5} = \boxed{4\sqrt{5}}$. De plus $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$.

2. On procède par changement de variable :

$$t^4 - 10t^2 + 5 = 0 \iff \mathrm{X} = t^2 \text{ et } \mathrm{X}^2 - 10\mathrm{X} + 5 = 0.$$

On résout l'équation du second degré $\mathrm{X}^2 - 10\mathrm{X} + 5 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 100 - 20 = 80$ donc cette équation admet deux solutions réelles :

$$\mathrm{X}_1 = \frac{10 - \sqrt{80}}{2} = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{2} = 5 - 2\sqrt{5} > 0 \text{ et } \mathrm{X}_2 = 5 + 2\sqrt{5} > 0.$$

On a bien $5 - 2\sqrt{5} > 0$ puisque $\sqrt{5} > 2$ donc $2\sqrt{5} > 4$ d'après la question précédente. On a alors :

$$\begin{aligned} (\mathrm{E}_1) : t^4 - 10t^2 + 5 = 0 &\iff \mathrm{X} = t^2 \text{ et } \mathrm{X} = 5 - 2\sqrt{5} \ \underline{\text{ou}} \ \mathrm{X} = 5 + 2\sqrt{5} \\ &\iff t^2 = 5 - 2\sqrt{5} \ \underline{\text{ou}} \ t^2 = 5 + 2\sqrt{5} \\ &\iff t = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \ \underline{\text{ou}} \ t = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \\ &\qquad \underline{\text{ou}} \ t = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \ \underline{\text{ou}} \ t = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{S}_1$ des solutions de l'équation (E_1) est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \right\}}.$$

3. Soit $x \in \mathscr{D}_{\tan}$.

3.1) D'après le cours (ou par lecture directe sur le cercle trigonométrique) :

$$\boxed{\cos(-x) = \cos(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(-x) = -\sin(x)}$$

3.2) On en déduit que :

$$\boxed{\tan(-x)} = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \boxed{= -\tan(x)}$$

4. 4.1) On rappelle que

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

et

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}.$$

4.2) On a alors que

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \boxed{\frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}.$$

Partie II — Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$

5. 5.1) Cette équation n'est définie que pour les nombres réels x vérifiant

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{et} \quad 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z},$$

à savoir

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{et} \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi le domaine de validité $\mathscr{D}$ de l'équation (E_2) est :

$$\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \right\}}.$$

5.2) Sur l'ensemble $\mathscr{D}$ défini précédemment,

$$\begin{aligned} (\mathrm{E}_2) &\iff \tan(2x) + \tan(3x) = 0 \\ &\iff \tan(2x) = -\tan(3x) \\ &\iff \tan(2x) = \tan(-3x) \quad \text{D'après le cours} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = -3x + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 5x = k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{k\pi}{5}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions sur $\mathscr{D}$ est $\boxed{\left\{ \frac{k\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}$.

5.3) Sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$, les solutions sont dans l'ensemble

$$\boxed{\left\{ -\pi, -\frac{4\pi}{5}, -\frac{3\pi}{5}, -\frac{2\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \right\}}.$$

6. On pose $t = \tan(x)$, où x est un réel tel que $\tan(x)$, $\tan(2x)$ et $\tan(3x)$ sont définis.

6.1) On a :
$$\boxed{\tan(2x)} = \tan(x+x) = \frac{\tan(x)+\tan(x)}{1-\tan(x)\tan(x)} = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)} = \boxed{\frac{2t}{1-t^2}}.$$

6.2) On a de même :
$$\begin{aligned}\boxed{\tan(3x)} &= \tan(2x+x)\\ &= \frac{\tan(2x)+\tan(x)}{1-\tan(2x)\tan(x)}\\ &= \frac{\frac{2t}{1-t^2}+t}{1-\frac{2t}{1-t^2}\times t} = \frac{2t+t(1-t^2)}{1-t^2-2t^2}\\ &= \frac{-t^3+3t}{1-3t^2} = \boxed{\frac{t(3-t^2)}{1-3t^2}}.\end{aligned}$$

6.3) On a par changement de variable
$$\begin{aligned}&\tan(2x)+\tan(3x)=0\\ \iff\ & t=\tan(x)\ \text{ et }\ \frac{2t}{1-t^2}+\frac{t(3-t^2)}{1-3t^2}=0\\ \iff\ & t=\tan(x)\ \text{ et }\ 2t(1-3t^2)+t(3-t^2)(1-t^2)=0\\ \iff\ & t=\tan(x)\ \text{ et }\ \boxed{t^5-10t^3+5t=0}.\end{aligned}$$

7. On a :
$$\begin{aligned}t^5-10t^3+5t=0 &\iff t(t^4-10t^2+5)=0\\ &\iff t=0 \text{ ou } t \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1).\end{aligned}$$
Par ailleurs, on a résolu précédemment l'équation (E_2) donc on sait que
$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_2) &\iff t=\tan(x) \text{ et } x\in\left\{\frac{k\pi}{5}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\\ &\iff t=\tan(x) \text{ et } t\in\left\{\tan(0),\tan\left(\frac{\pi}{5}\right),\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right),\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right),\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\}.\end{aligned}$$
Ainsi comme $\tan(0)=0$ on en déduit que les nombres
$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right),\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right),\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)\ \text{ et }\ \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$
sont solutions de (E_1).
Comme $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des éléments de l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}[$,
$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)>0 \text{ et } \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0.$$
Comme $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$ sont des éléments de l'intervalle $]\frac{\pi}{2},\pi[$,
$$\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)<0 \text{ et } \tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)<0.$$
Enfin, on sait que
$$\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)<\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$
La synthèse de ces informations donne que
$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$
puisque c'est la plus petite des deux solutions positives de (E_1).

Partie III — Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

8. **8.1)** D'après le cours : $\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$ *(Théorème de Pythagore)*

8.2) Pour tout $x\in\mathscr{D}_{\tan}$,
$$1+\tan^2(x) = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
Ayant $1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$, on obtient bien que $\boxed{\cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}}$

8.3) Grâce à la question précédente, on sait que $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$ donc
$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{1}{1+(5-2\sqrt{5})}\\ &= \frac{1}{6-2\sqrt{5}}\\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} \quad \textit{Multiplication par la quantité conjuguée}\\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{6^2-(2\sqrt{5})^2}\\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{36-20}\\ &= \frac{6+2\sqrt{5}}{16}.\end{aligned}$$
Comme par ailleurs on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ $\left(\text{comme } \frac{\pi}{5}\in[0,\frac{\pi}{2}]\right)$:
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}.$$

8.4) On sait d'après le théorème de Pythagore que $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ donc
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

Comme par ailleurs on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ $\left(\text{comme } \frac{\pi}{5} \in [0, \pi]\right)$:

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}.$$