

Programme de colles

du 3 au 7/11/2025

- Cette semaine : 1 question de cours en Maths.

1 [MATHS] LOGIQUE, ENSEMBLES & RAISONNEMENTS



Attention
On évitera tout exercice théorique de logique, on contrôlera les notions plutôt *via* les techniques de raisonnements.

- **Logique élémentaire.** Proposition logique, équivalence. Objet python `bool`. Quantificateurs. Opérations logiques **ou**, **et**, **non** sur les propositions. Négation de propositions avec quantificateurs. Implication, négation d'une implication, contraposée, transitivité et cycles d'implications.
- **Ensembles.** Définition intuitive, ensembles d'entiers, inclusion, égalité. Ensemble des parties. Opérations sur les ensembles, parties disjointes. Complémentaire. Produit cartésien.
- **Raisonnements.** Sur l'existence/unicité de propositions. Sur les ensembles. Disjonction de cas. Sur les liens logiques entre propositions, raisonnement par l'absurde. Raisonnements par récurrence.

2 [MATHS] NOMBRES RÉELS



Attention

- Les réunions et intersections quelconques d'ensembles n'ont pas encore été vues, de-même que la notation de partition d'ensembles.
- Les exercices « epsilonlesques » sur la borne supérieure ou inférieure ne sont pas dans l'esprit du programme. On évitera d'interroger sur le sujet en dehors



des questions de cours.

- **Opérations de bases.** Addition / Multiplication, règles de calcul sur les fractions, forme irréductible. Inégalité, minimum maximum de deux réels. Manipulation d'encadrements. Puissances entières d'un réel, identités remarquables. Racines carrées et cubiques. Propriétés des racines. Valeur absolue et distance entre deux réels. Inégalité triangulaire.
- **Sous-ensembles de \mathbb{R} .** Ensembles usuels. Intervalles. Écriture d'intervalles à l'aide de la valeur absolue.
- **Résolution d'équations & inéquations.** Aspect logique : travail par équivalences ou par implications (élimination de « solutions parasites »). Techniques propres aux : produits, quotients, second degré et généralisation aux ordres supérieurs lorsqu'une racine évidente est connue, transformations exponentielles et logarithmiques, avec racines et valeurs absolues, par études de fonctions. Résolution de systèmes linéaires à 2 équations et 2 inconnues.
- **Parties majorées / minorées et partie entière.** Définition de partie majorée / minorée / bornée, notion de borne supérieure / inférieure, maximum / minimum. Partie entière : définition et caractérisation comme plus grand entier inférieur à un réel.

3 [MATHS] TRIGONOMÉTRIE



Attention

- Les seules formules de trigonométrie au programme sont celles du programme de colles : angles associés, formules d'addition, de duplication et de linéarisation. Tout autre formule ($\cos x + \cos y$ par exemple, angle moitié *etc.*) est **hors-programme**.

- **[Généralités]** Définition de \cos , \sin , \tan à l'aide du cercle trigonométrique. Premières propriétés (périodicité et parité), relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Valeurs remarquables.
- **[Formules trigonométriques]** Angles associés. Formules d'addition, de duplication et de linéarisation. Transformation de combinaisons linéaires trigonométriques en un seul terme trigonométrique.
- **[Équations et inéquations trigonométriques]** Équations à l'aide d'un théorème (que l'on peut retrouver graphiquement) et inéquations à l'aide d'un dessin.



Attention
Note aux colleurs : merci d'éviter les exercices avec uniquement des calculs de limites (ou alors 1 ou 2 maximum). Priorité aux études de fonctions pas trop techniques dans ce chapitre.

Attention
L'objectif de ce chapitre est de balayer toutes les notions permettant d'effectuer une étude complète de fonction **simple** :

- des généralités, en incluant la notion de composée, mais pas encore de fonction bijective.
- Des calculs pratiques de limites : règles usuelles, croissances comparées, théorèmes d'encadrement/majoration/minoration et quelques techniques pour lever des formes indéterminées. **Pas encore d'équivalents, et de théorème de convergence monotone etc..**
- La définition de fonction continue et les opérations classiques sur les fonctions continues mais rien d'autre. **En particulier, pas encore de prolongement par continuité, d'équivalents et de « grands » théorèmes type théorème de la bijection, etc..** Le théorème de la bijection sera vu dans un prochain chapitre. Les études de continuité de fonctions compliquées (avec parties entières par exemples, ou définies par plusieurs expressions) ne sont pas dans l'esprit de ce programme de colles.
- Des calculs pratiques de dérivées, mais là encore pas encore de « grand » théorème. Dérivée d'une composée notamment, mais pas encore la dérivée d'une réciproque.
- Les fonctions usuelles, mais pas encore celles définies en tant que bijection réciproque (arcsin, arccos, arctan).
- Généralités.** Fonction, et application. Image d'une fonction, graphe. Opérations sur les fonctions. Composée. Parité, imparité, périodicité. Sens de variation. Fonctions bornées, majorées, minorées.
- Calculs de limites & Continuité.** Limite à droite/gauche. Opérations. Composition des limites. Théorème d'encadrement, de majoration/minoration. Croissances comparées. Continuité en un point, sur un intervalle. Opérations et compositions de fonctions continues.
- Calculs de dérivées.** Nombre dérivé, fonction dérivable. Équation de la tangente. Dérivable implique continue. Dérivée d'une composée. Monotonie et dérivée.

Utilisation de la dérivation pour calculer des limites.

- Fonctions usuelles.** Polynômes, carré, cube. Monôme inverse, racine carrée, limites de racines par expression conjuguée. Logarithme népérien, logarithme décimal. Puissances sous forme exponentielle. Valeur absolue. Partie entière. Fonctions circulaires : sin, cos et tan.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

- Rappeler les formules donnant **non** (P **ou** Q) et **non** (P **et** Q). Application : soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, exprimer la négation de $a \leq b \leq c$ et $a < b \leq c$.
- Définir la proposition logique $P \implies Q$ où P, Q sont deux propositions logiques, puis donner **non** ($P \implies Q$). Application à la négation de :
« $\forall (x, y) \in \mathbb{I}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$. »
- Définir la contraposée de $P \implies Q$ où P, Q sont deux propositions logiques. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.
- Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Définir proprement (avec accolades!) les ensembles $A \cup B, A \cap B$, puis montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (loi de MORGAN).
- Définir la valeur absolue et citer l'inégalité triangulaire. Montrer que :
$$[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \right. \right\} \quad \text{pour } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que : } a \leq b.$$
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$
- Définition d'un majorant d'une partie. Définition de la borne supérieure, en précisant notamment sous quelle hypothèse elle existe.
- Définition d'un minorant d'une partie. Définition du minimum d'une partie, en précisant notamment sous quelle hypothèse il existe.
- Définir la partie entière. Expliquer les valeurs de $[3.1], \lfloor -4.5 \rfloor$.
- Donner deux valeurs remarquables de cos, sin ou tan (choisies par l'examineur), deux formules d'angles associés et deux formules de trigonométries choisies par l'examineur parmi : $\cos(x \pm y), \sin(x \pm y)$, duplication.
- Donner l'ensemble des solutions de $\cos x = \cos a$ où $a \in \mathbb{R}$. Application à :
$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{sur } [0, 2\pi[.$$

Même question avec $\sin x = \sin a$ où $a \in \mathbb{R}$. Application à :
$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{sur }] -2\pi, 0].$$
- Résoudre, selon deux méthodes, $\sin x = \cos x$.
- Donner la définition de fonction dérivable en un point a , et de $f'(a)$. En déduire

la limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ selon deux méthodes. (d'une part en reconnaissant un taux d'accroissement, d'autre part en simplifiant l'expression.)

14. Domaine de définition et dérivabilité de f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)$, puis calcul de la dérivée.
15. Domaine de définition et dérivabilité de g définie par $g(x) = \frac{x \ln(x)}{e^{x^2}}$, puis calcul de la dérivée.
16. Fonction usuelle $x \mapsto \sqrt{x}$: domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites, dérivabilité (énoncer la formule donnant la dérivée et démontrer qu'elle n'est pas dérivable en zéro).
17. Fonction usuelle partie entière : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites remarquables. Justifier les valeurs des limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x]$.
18. Fonction usuelle tan : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites remarquables, dérivabilité.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraîne encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : programme identique au précédent, mais pour l'autre groupe.