

Devoir surveillé n°2

samedi 15/11/2024

Durée : 3 h

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousseaux sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entraînent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
 - ◇ variables non quantifiées (*utiliser les symboles \forall, \exists , etc. appropriés.*)
 - ◇ confusion entre égalité = et équivalence \iff ,
 - ◇ « la fonction $f(x)$ »,
 - ◇ un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Questions de cours Agro-Véto

1. Allure de la représentation graphique de la fonction sin sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Équation de la tangente de la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a .
3. Pour n et k entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
4. Définition du module d'un nombre complexe.

Exercice 2 | Étude d'une fonction [Solution] On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f , noté \mathcal{D}_f .
2. Donner en justifiant le domaine de dérivabilité de f , et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau des variations de f . On précisera les valeurs des limites en 0 et en $+\infty$.
4. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
5. Tracer soigneusement la courbe représentative de f .
On placera sur le même graphique la tangente au point d'abscisse 1. On donne pour le tracé la valeur de $e \approx 2,7$.

Exercice 3 | [Solution]

1. En utilisant la forme exponentielle, déterminer les $Z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$Z^2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

2. On considère le nombre complexe : $z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$.

2.1) Écrire z^2 sous forme algébrique.

2.2) Écrire z^2 sous forme exponentielle.

2.3) En déduire que $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$, puis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 | [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes et produit ci-dessous :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n \left(k^3 - \frac{1}{3^{k+1}} \right), S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} (3k^2 + 1), S_3 = \sum_{\ell=0}^{2n+3} \left(\sqrt{\ell+1} - \sqrt{\ell} \right), P_1 = \prod_{k=n}^{3n} k.$$

1. >_☛

1.1) Écrire une fonction python $S_2(n)$ qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de S_2 .

1.2) Écrire une fonction python $P_1(n)$ qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de P_1 .

2. Calculer les valeurs de S_1, S_2, S_3 et P_1 . Pour P_1 , on exprimera le résultat à l'aide de factorielles lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, et à part le résultat pour $n = 0$.

Exercice 5 | Second degré à coefficients dans \mathbb{C} [Solution] Le but de cet exercice est de résoudre sur \mathbb{C} l'équation :

$$(E) : az^2 + bz + c = 0 \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des complexes, } a \text{ étant non nul,}$$

et ainsi d'étendre le résultat vu en cours. Les formules que vous connaissez pour trouver les solutions d'une équation de degré 2 ne s'appliquent donc *a priori* pas ici, car les coefficients de l'équation sont des nombres complexes.

1. [Preliminaire] Démontrer, en utilisant la forme algébrique, que les solutions de : $z^2 = -8 - 6i$ sont les complexes $1 - 3i$ et $-1 + 3i$.

2. [Résultat général]

2.1) Justifier que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$.

- 2.2) On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on considère δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. On peut démontrer qu'il existe toujours au moins une telle racine dans \mathbb{C} .

En remarquant que $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2$, factoriser l'expression ci-dessus et en déduire que les solutions de l'équation (E) sont :

$$\frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}.$$

3. [Utilisation] On cherche à résoudre sur \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - (5 + i)z + 8 + 4i$.

3.1) Calculer Δ , puis donner $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

- 3.2) En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 6 | Sommes de GAUß [Solution] Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p.$$

Le but de cet exercice est de présenter une méthode pour calculer $S_p(n)$ en trouvant une relation de récurrence.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner sans justification les valeurs de $S_0(n), S_1(n), S_2(n)$ et $S_3(n)$ en fonction de n .

2. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

- 2.1) Montrer que, à l'aide d'un changement d'indice, que :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1.$$

- 2.2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, développer $(k+1)^{p+1}$ à l'aide de la formule du binôme.

- 2.3) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n).$$

- 2.4) À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n) \right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simplifiée de $S_4(n)$.

Fin du sujet

Correction

Devoir surveillé n° 2

samedi 15/11/2024

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. $x \in \mathcal{D}_f \iff x > 0, x \neq 0$, donc : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* (dont le dénominateur ne s'annule pas) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$1 - \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \\ \iff x \leq e,$$

et $f(e) = \frac{1}{e} = e^{-1}$. Par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ par croissances comparées. On dresse enfin le tableau des variations de f :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	e^{-1}	0

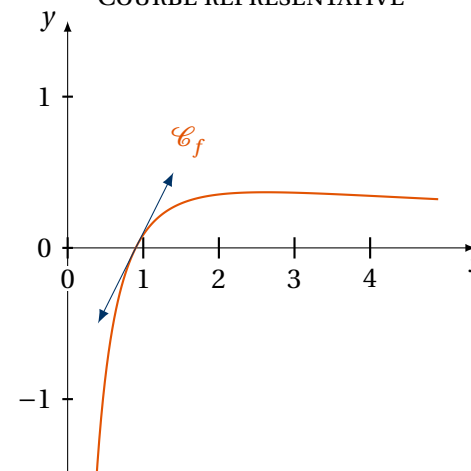
4. On a : $f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $f'(1) = \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = 1$.

5. On rappelle que $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f , notée \mathcal{C}_f , au point d'abscisse 1 (on notera la tangente T_1) dont l'équation complète est :

$$T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1.$$

Pour le positionnement du point de coordonnées (e, e^{-1}) , on utilise l'indication de l'énoncé : $e \approx 2,7$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions Z sous la forme $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors :

$$Z^2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} \iff (\rho e^{i\theta})^2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ \iff \rho^2 e^{2i\theta} = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ \iff \rho^2 = 8, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2\theta = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \iff \rho = 2\sqrt{2}, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi. \quad \rho > 0$$

Or,

$$0 \leq \theta < 2\pi \iff 0 \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi < 2\pi \\ \iff 0 \leq \frac{7}{12} + k < 2 \iff -\frac{7}{12} \leq k < \frac{17}{12} \\ \iff k \in \{0, 1\}.$$

Donc : $Z^2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} \iff Z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ ou $Z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

2. 2.1)

$$z^2 = (1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}))^2 \\ = (1 - \sqrt{3})^2 - (1 + \sqrt{3})^2 + 2(1 - \sqrt{3})i(1 + \sqrt{3}) \\ = 1 + 3 - 2\sqrt{3} - (1 + 3 + 2\sqrt{3}) + 2i(1 - 3) \\ = -4(\sqrt{3} + i).$$

2.2) On a $|z^2| = |-4| |\sqrt{3} + i| = 4 \times \sqrt{3+1} = 8$. Donc :

$$\frac{z^2}{|z^2|} = \frac{-4(\sqrt{3} + i)}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

Ainsi : $z^2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

2.3) Ainsi, d'après la première question :

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \text{ ou } z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$

Il reste à justifier qu'il faut garder le premier choix de z . On peut constater que $\operatorname{Re} z < 0$ et $\operatorname{Im} z > 0$ d'après l'écriture algébrique de z . Or, $\frac{3\pi}{2} < \frac{19\pi}{12} < 2\pi$ donc $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) > 0$ et alors $\operatorname{Re}\left(2\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}\right) > 0$. Donc nécessairement $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Au bilan, on a montré que :

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

Ou encore en revenant à la définition de l'exponentielle :

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on déduit alors :

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \sqrt{3}, \quad 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1 + \sqrt{3}.$$

On déduit alors :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Solution (exercice 4) [\[Énoncé\]](#)

1. >_☞

```
1.1) def S_2(n):
    S = 0
    for k in range(0, n+2):
        S += 3*k**2 + 1
    return S
```

```
>>> S_2(0)
```

```
5
```

```
>>> S_2(4)
```

```
171
```

```
1.2) def P_1(n):
```

```
P = 1
```

```
for k in range(n, 3*n+1):
```

```
    P *= k
```

```
return P
```

```
>>> P_1(0)
```

```
0
```

```
>>> P_1(4)
```

```
79833600
```

2. •

$$S_1 = \sum_{k=0}^n k^3 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{3} \frac{1}{3^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n k^3 - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

•

$$S_2 = 3 \sum_{k=0}^{n+1} k^2 + \sum_{k=0}^{n+1} 1$$

$$= 3 \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} + (n+1-0+1) \times 1$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2} + \frac{2(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)[(n+1)(2n+3)+2]}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(2n^2+5n+5)}{2}.$$

• On a ici un télescopage.

$$S_3 = \sum_{\ell=0}^{2n+3} \sqrt{\ell+1} - \sum_{\ell=0}^{2n+3} \sqrt{\ell}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n+4} \sqrt{k} - \sum_{\ell=0}^{2n+3} \sqrt{\ell}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{2n+3} \sqrt{k}} + \sqrt{2n+4} - \left(0 + \sum_{\ell=1}^{2n+3} \sqrt{\ell}\right)$$

$$= \sqrt{2n+4}$$

• Commençons par utiliser la relation de CHALES :

$$P_1 = \prod_{k=n}^{3n} k = \frac{\prod_{k=1}^{3n} k}{\prod_{k=1}^{n-1} k}$$

- ◇ Si $n = 0$, alors $P_1 = 0$ en reprenant l'expression de départ.
- ◇ Si $n \geq 1$, donc $n - 1 \geq 0$. Ainsi, les deux produits du quotient font apparaître une factorielle, et on a :

$$P_1 = \frac{\prod_{k=1}^{3n} k}{\prod_{k=1}^{n-1} k} = \frac{(3n)!}{(n-1)!}$$

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. Déterminons les solutions de $z^2 = -8 - 6i$ sous la forme $z = x + iy \in \mathbb{C}$. En injectant, on obtient :

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -8 - 6i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -6 \\ |z|^2 = -8 - 6i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = -3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} \curvearrowright \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ xy = -3 \\ y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ xy = -3 \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

Comme x, y doivent être de signe opposé, on obtient les solutions :

$$\mathcal{S} = \{1 - 3i, -1 + 3i\}$$

2. 2.1) On peut développer le membre de droite, ou alors utiliser la technique habituelle pour obtenir la forme canonique d'un trinôme :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

2.2) On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et soit δ tel que $\delta^2 = \Delta$.

- $\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. La remarque est établie.

•

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \\ &= \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \\ &= \left(z + \frac{b + \delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b - \delta}{2a} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } az^2 + bz + c = a \left[\left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \right]$$

On en déduit que les racines du polynôme $az^2 + bz + c$ sont :

$$\frac{-b - \delta}{2a}, \quad \text{et} \quad \frac{-b + \delta}{2a}$$

3. On cherche à résoudre sur \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - (5 + i)z + 8 + 4i$.

3.1) On a après calculs :

$$\Delta = (5 + i)^2 - 4(8 + 4i) = 25 - 1 + 10i - 32 - 16i = -8 - 6i$$

De la première question, on constate que $\delta = 1 - 3i$ convient.

3.2) De la deuxième question, on déduit que les solutions de (E) sont :

$$\frac{(5 + i) \pm (1 - 3i)}{2}, \quad \text{d'où : } \mathcal{S} = \{2 + 2i, 3 - i\}$$

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le cours, on a :

$$S_0(n) = n, S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

La valeur de $S_0(n)$ provient de :

$$S_0(n) = \sum_{k=1}^n k^0 = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

puisque la somme comporte n termes.

2. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

2.1) On a en posant $\ell = k + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} &= \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell^{p+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^n k^{p+1} + (n+1)^{p+1} - 1^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1$$

2.2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a à l'aide de la formule du binôme :

$$(k+1)^{p+1} = \sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} k^\ell$$

2.3) En sommant la question précédente, on déduit alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} k^\ell \right) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{p+1} \sum_{k=1}^n \binom{p+1}{\ell} k^\ell = \sum_{\ell=0}^{p+1} \binom{p+1}{\ell} \underbrace{\sum_{k=1}^n k^\ell}_{S_\ell(n)} \\
 &= \binom{p+1}{p+1} S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n) \\
 &= \boxed{S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n)}.
 \end{aligned}$$

*inversion des
sommes simples
indépendantes*
*sortie du terme
 $\ell = p+1$*

2.4) On voit que $\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1}$ apparait dans deux formules. Plus précisément, on a obtenu :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1 \\ \sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n). \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\cancel{S_{p+1}(n)} + (n+1)^{p+1} - 1 = \cancel{S_{p+1}(n)} + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n).$$

Le terme $S_p(n)$ se cache dans la dernière somme, c'est le terme d'indice $\ell = p$. On obtient alors :

$$(n+1)^{p+1} - 1 = \binom{p+1}{p} S_p(n) + \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n).$$

Comme $\binom{p+1}{p} = \frac{(p+1)!}{p!1!} = p+1$, on obtient alors la formule souhaitée en isolant $S_p(n)$:

$$\boxed{S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n) \right)}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en prenant $p = 4$ dans l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
 S_4(n) &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - \sum_{\ell=0}^3 \binom{5}{\ell} S_\ell(n) \right) \\
 &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - \binom{5}{0} S_0(n) - \binom{5}{1} S_1(n) - \binom{5}{2} S_2(n) - \binom{5}{3} S_3(n) \right) \\
 &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - 1 \times n - 5 \times \frac{n(n+1)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- 10 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 10 \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
 &= \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - (n+1) - \frac{15n(n+1)}{6} - \frac{10n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{15n^2(n+1)^2}{6} \right) \\
 &= \frac{(n+1)}{30} (6(n+1)^4 - 6 - 15n - 10n(2n+1) - 15n^2(n+1)) \\
 &= \frac{(n+1)}{30} (6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 6 - 15n - 20n^2 - 10n - 15n^3 - 15n^2) \\
 &= \frac{(n+1)}{30} (6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) \\
 &= \boxed{\frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}}.
 \end{aligned}$$

On peut donc calculer, par récurrence, les sommes de GAUß suivantes!
 $S_5(n), S_6(n)$ etc..