Programme de colles
du 24 au 28/11/2025

- Cette semaine : **1** question de cours en Maths et **1** question de cours en Info (sur les sommes et produits).

1 [MATHS] CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS

Attention

L'identité $a^n - b^n$ est hors programme.

- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de Bernoulli « $a^n - b^n$ » [H.P] . Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, Pascal. Triangle de Pascal, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.
- **Sommes doubles.** Sommes doubles libres, cas des indices séparables : définition et calcul. Sommes doubles sous contrainte $i \leqslant j$ et contrainte $i < j$: définition, théorème de permutation et calculs.

2 [MATHS] NOMBRES COMPLEXES

Pas d'exercices trop techniques (du moins en début de colle) sur les complexes. Il s'agit d'insister sur les thèmes suivants : résolution d'équations (second degré pour préparer EDL_2 et SRL_2, racines de complexes), calculs (formes algébriques/exponentielles), déterminer une forme exponentielle et applications en trigonométrie.

Attention

- L'exponentielle générale e^z (sauf si $z \in i\mathbb{R}$) n'est pas au programme, mais peut faire l'objet d'exercices si la définition est donnée.
- Au sujet des racines n-ièmes : aucun résultat n'est au programme, même pour l'unité. Les étudiant(e)s doivent uniquement être capables de les calculer sur des exemples en cherchant les solutions sous forme exponentielle, éventuellement algébrique si $n = 2$.
- Les équations du second degré à coefficients non réels sont hors-programme.
- Les applications en géométrie ne sont pas au programme non plus ; en particulier, l'interprétation d'angles orientés à l'aide d'un argument.

- **Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique.** Définition de $\mathbb{C}$ comme un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un élément i vérifiant $i^2 = -1$. Unicité de la forme algébrique. Notation pour le complexe j . Identité remarquable $a^2 + b^2$. Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés. Complexes de module 1.
- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de Moivre. Expression exponentielle de j , et propriétés de j . Formule d'Euler, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moitié pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle. Racines n-ièmes de complexes, cas de la racine carrée à l'aide de la forme algébrique. Équations du second degré à coefficients réels : extension des formules du lycée au cas $\Delta < 0$.
- **Applications en trigonométrie.** Linéarisation, anti-linéarisation (Moivre et angle moitié), sommes trigonométriques en « complexifiant » les sommes.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soient n, p deux entiers tels que $n \geqslant p$. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+2} - a_k)$ à l'aide d'un changement d'indice.
2. Énoncer la formule générale du binôme et expliquer les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.

3. Écrire une fonction d'en-tête `somme(p, n, x)` et renvoyant $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$, n, p deux entiers relatifs.
4. Écrire une fonction d'en-tête `produit(p, n, x)` et renvoyant $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$, n, p deux entiers relatifs.
5. Écrire une fonction d'en-tête `sommedouble(n, p)` et renvoyant $\sum_{p \leq i,j \leq n} (j-i)^2$, n, p deux entiers positifs.
6. Définir le module d'un complexe, puis rappeler l'expression à l'aide du conjugué. Démontrer que : $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$ si $z, z' \in \mathbb{C}$.
7. Définir l'exponentielle imaginaire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et citer les formules d'Euler. Rappeler la forme exponentielle du complexe j. En déduire : la forme algébrique de j, que $\mathrm{j}^3 = 1$, et enfin que $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
8. Déterminer la forme exponentielle $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi[$ uniquement.
9. Déterminer, en utilisant la forme exponentielle, les solutions de $z^3 = 1$. Les représenter sur un dessin.
10. Calculer les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ à l'aide de la forme algébrique.
11. Donner les formules d'Euler. Linéariser, en utilisant des nombres complexes, $\sin^3 x$.
12. Rappeler le développement de $(a+b)^4$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Anti-linéariser $\cos(4x)$ (*i.e.* l'exprimer en fonction $\cos x$ et $\sin x$) pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant des nombres complexes.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : on ajoute les applications.