Programme de colles
du 1 au 5/12/2025

- Cette semaine : <u>1</u> question de cours en Maths.

1 [MATHS] CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS

Attention

L'identité $a^n - b^n$ est hors programme.

- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de Bernoulli « $a^n - b^n$ » [H.P] . Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, Pascal. Triangle de Pascal, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.
- **Sommes doubles.** Sommes doubles libres, cas des indices séparables : définition et calcul. Sommes doubles sous contrainte $i \leqslant j$ et contrainte $i < j$: définition, théorème de permutation et calculs.

2 [MATHS] NOMBRES COMPLEXES

Pas d'exercices trop techniques (du moins en début de colle) sur les complexes. Il s'agit d'insister sur les thèmes suivants : résolution d'équations (second degré pour préparer EDL_2 *et* SRL_2*, racines de complexes), calculs (formes algébriques/exponentielles), déterminer une forme exponentielle et applications en trigonométrie.*

Attention

- L'exponentielle générale e^z (sauf si $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$) n'est pas au programme, mais peut faire l'objet d'exercices si la définition est donnée.
- Au sujet des racines n-ièmes : aucun résultat n'est au programme, même pour l'unité. Les étudiant(e)s doivent uniquement être capables de les calculer sur des exemples en cherchant les solutions sous forme exponentielle, éventuellement algébrique si $n = 2$.
- Les équations du second degré à coefficients non réels sont hors-programme.
- Les applications en géométrie ne sont pas au programme non plus ; en particulier, l'interprétation d'angles orientés à l'aide d'un argument.

- **Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique.** Définition de $\mathbb{C}$ comme un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un élément i vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$. Unicité de la forme algébrique. Notation pour le complexe j. Identité remarquable $a^2 + b^2$. Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés. Complexes de module 1.
- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de Moivre. Expression exponentielle de j, et propriétés de j. Formule d'Euler, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moitié pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle. Racines n-ièmes de complexes, cas de la racine carrée à l'aide de la forme algébrique. Équations du second degré à coefficients réels : extension des formules du lycée au cas $\Delta < 0$.
- **Applications en trigonométrie.** Linéarisation, anti-linéarisation (Moivre et angle moitié), sommes trigonométriques en « complexifiant » les sommes.

3 [MATHS] INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS. BIJECTIONS NUMÉRIQUES.

Attention

- L'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.
- Conformément au programme de BCPST, on limitera les exercices aux fonctions numériques dans un premier temps. À la rigueur, dans un second

temps, des applications complexes, de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ linéaire (avec calcul de réciproque), *etc.*. On évitera tout exercice théorique.

- Éviter les exercices non guidés sur arcsin et arccos (même sans fonction), le(s) question(s) de cours suffira(ont).

- **Fonctions & Applications.** Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Identité. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque.
- **Applications aux fonctions numériques.** Bijection numérique, obtenir le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f. Théorème de la bijection continu : utilisation pour l'existence et l'unicité d'une solution à une équation (plusieurs exemples, cas d'une suite implicite), utilisation pour déterminer des images directes de parties en combinant éventuellement avec la propriété « $f(A\cup B) = \ldots$ ». Retour sur la racine cubique : existence et unicité, expression exponentielle. Dérivabilité d'une bijection réciproque. Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos (définition, relations arcsin(sin(...)) = ..., sin(arcsin(...)) = ...), arctan (étude complète : définition, relations arctan(tan(...)) = ..., tan(arctan(...)) = ..., parité, dérivée, limites, graphe).

Attention

Aucune autre notion que celles indiquées entre parenthèses ne sont au programme pour arcsin, arccos, mais cela peut faire l'objet d'exercices guidés.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir l'exponentielle imaginaire $e^{i\theta}$ pour $\theta\in\mathbb{R}$, et citer les formules d'EULER. Rappeler la forme exponentielle du complexe j. En déduire : la forme algébrique de j, que $j^3=1$, et enfin que $1+j+j^2=0$.
2. Déterminer la forme exponentielle $1-e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0,\pi[$ uniquement.
3. Déterminer, en utilisant la forme exponentielle, les solutions de $z^3=1$. Les représenter sur un dessin.
4. Calculer les racines carrées de $3+4i$ à l'aide de la forme algébrique.
5. Donner les formules d'EULER. Linéariser, en utilisant des nombres complexes, $\sin^3 x$.
6. Rappeler le développement de $(a+b)^4$, avec $a,b\in\mathbb{C}$. Anti-linéariser $\cos(4x)$ (*i.e.* l'exprimer en fonction $\cos x$ et $\sin x$) pour tout $x\in\mathbb{R}$, en utilisant des nombres complexes.
7. Soit $f:E\longrightarrow F$ une application. Écrire la **définition** *(avec quantificateurs!)* de « f injective » et « f surjective ». Écrire ensuite la négation de ces deux propriétés.
8. Soit $f:E\longrightarrow F$ une application bijective. Expliquer ce qu'est $f^{-1}:F\longrightarrow E$ (définition). Montrer, en résolvant une équation, que $f\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+\star}\\ x & \longmapsto & e^{2x+1}\end{array}\right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.
9. Citer le théorème de la bijection. Montrer que le polynôme $x\longmapsto x^3+tx-1$ admet une unique racine réelle $u(t)$ pour tout $t\geqslant 0$.
10. Définir les fonctions arccos, arcsin *(uniquement la définition en utilisant le théorème de la bijection)*. Réciter et compléter :
$$\forall x\in\ldots,\quad \arccos(\cos(x))=\ldots \quad\text{et}\quad \forall x\in\ldots,\quad \cos(\arccos(x))=\ldots,$$
$$\forall x\in\ldots,\quad \arcsin(\sin(x))=\ldots \quad\text{et}\quad \forall x\in\ldots,\quad \sin(\arcsin(x))=\ldots.$$
11. Fonction usuelle arctan : définition, parité, allure du graphe, limites aux bornes du domaine, et dérivée/dérivabilité à **justifier**.
12. Rappeler le domaine de dérivabilité d'arctan, la dérivée et montrer la formule ci-après : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{si } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0.\end{cases}$

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : calculs de primitives et intégral.