Devoir surveillé n°3
samedi 05/12/2025

Durée : 3 h

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousses sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
-
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entrainent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
  - variables non quantifiées *(utiliser les symboles* $\forall$, $\exists$, *etc. appropriés.)*
  - confusion entre égalité = et équivalence $\Longleftrightarrow$,
  - « la fonction $f(x)$ »,
  - un excès de phrases sans sens.

Attention ! il surveille depuis la Laponie les réponses non-encadrées, les résultats non justifiés, soyez vigilants. La magie Noël pourrait introduire des points négatifs de présentation...

Exercice 1 | Questions de cours Agro-Véto

1. Définition d'une application $f : E \longrightarrow F$ surjective.
2. Allure de la représentation graphique de la fonction arctan en précisant ses asymptotes en $\pm\infty$.
3. Si f est la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = \sqrt{1-x}$ sur l'intervalle $]0,1[$, déterminer l'expression d'une de ses primitives sur $]0,1[$.
4. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer l'expression d'une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.

Exercice 2 |

[Solution] Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit :

$$S_n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij.$$

1. Écrire une fonction Python `calcul_S(n)` qui renvoie la valeur de S_n.
2. Calculer S_n en fonction de n.

Exercice 3 |

[Solution] On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos(3x)\sin^2(x).$$

1. Linéariser, à l'aide de nombres complexes, la fonction f.
2. En déduire l'unique primitive F de f qui s'annule en π.

Exercice 4 |

[Solution] On définit les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

1. **1.1)** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, rappeler une expression de $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

   1.2) En effectuant le changement de variable $x = \sin(\theta)$, montrer que :
   $$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$
2. À l'aide d'une intégration par parties, trouver un lien entre J et I. En déduire la valeur de J. *Pour l'intégration par parties, on pourra partir de l'intégrale* I *en écrivant que* $I = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \times \sqrt{1-x^2}\,dx$ *et on rappelle que* $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ *si u est une fonction dérivable à valeurs strictement positives.*
3. On considère l'intégrale : $K = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Montrer que $K = I + J$ et en déduire la valeur de K.

Exercice 5 | [Solution] On définit deux fonctions f et g par :

$$g(x) = 2x + \cos(x), \quad f(x) = \ln(2x + \cos(x)).$$

1. **1.1)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.
   1.2) Donner le tableau de signe de g sur $\mathbb{R}$ en fonction de α.
2. **2.1)** Déterminer le domaine de définition et les limites de f aux bornes de celui-ci.
   2.2) Montrer que f réalise une bijection de son domaine de définition sur un intervalle J à déterminer.
3. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
   3.1) Écrire une fonction python `trace_fbij()` sans argument qui trace sur un même graphique la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0.5, 10]$ ainsi que celle de sa bijection réciproque f^{-1}.
   3.2) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J.
   3.3) Calculer : $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 6 | [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit une fonction f par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k.$$

1. Écrire en Python une fonction `f(x, n)` qui renvoie la valeur de $f(x)$.
2. **2.1)** Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$.
   2.2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}$.
3. **3.1)** Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x t^p \, \mathrm{d}t = \frac{x^{p+1}}{p+1}, \text{ et } \int_0^x (1+t)^p \, \mathrm{d}t = \frac{(1+x)^{p+1} - 1}{p+1}.$$
   3.2) En calculant $\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$ de deux façons différentes, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1+x)^{k+1} - 1}{k+1}.$$
   3.3) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. **4.1)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(x^i \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \right)$. *Indication : on pourra commencer par développer $(1+x)^k$ dans la définition de f.*
   4.2) En admettant que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients, en déduire que :
$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} = \binom{n}{i+1}.$$
La formule est-elle encore vérifiée pour $i \geqslant n$?

Fin du sujet

Correction
Devoir surveillé n° 3
samedi 05/12/2025

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1.
```python
def calcul_S(n):
    S = 0
    for i in range(0, n+1):
        for j in range(0, i+1):
            S += i*j
    return S
```
```
>>> calcul_S(3)
25
```

2.

$$S_n = \sum_{0\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(ij)$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left(i\sum_{j=0}^{i} j\right) = \sum_{i=0}^{n} i\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(i^3+i^2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} i^3 + \sum_{i=0}^{n} i^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

Après avoir mis $n(n+1)$ en facteur, on trouve alors :

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1)\cdot\frac{3n^2+7n+2}{12} = \boxed{\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}}.$$

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. D'après les formules d'EULER :

$$\cos(3x) = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2},\qquad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

On pose alors :

$$\sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right).$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$
$$= -\frac{1}{8}\left(e^{5ix}-2e^{3ix}+e^{ix}+e^{-ix}-2e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{4}\left(2\cos(3x)-\cos(5x)-\cos(x)\right)}.$$

2. Une primitive F de f est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin(3x)}{3}-\frac{\sin(5x)}{20}-\sin(x)\right)+C.$$

La condition $F(\pi)=0$ donne $C=0$, donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{F(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin(3x)}{3}-\frac{\sin(5x)}{20}-\sin(x)\right)}.$$

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. 1.1) Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\boxed{\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}}$.

1.2) Si $x=\sin(\theta)$, alors $dx = \cos(\theta)\,d\theta$.
De plus, si $\theta=0$, alors $x=0$ et si $\theta=\frac{\pi}{6}$, alors $x=\frac{1}{2}$.
La fonction $\theta\mapsto\sin(\theta)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{6}]$, par changement de variable,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\cos^2(\theta)}\cos(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}|\cos(\theta)|\cos(\theta)\,d\theta$$
car $|\cos(\theta)|=\cos(\theta)$ *ayant* $\theta\in[0,\frac{\pi}{6}]$, *donc* $\cos(\theta)\geqslant 0$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2(\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}}.$$

2. Par intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} u'(x)=1, & u(x)=x\\ v(x)=\sqrt{1-x^2}, & v'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\end{cases}\quad\text{on a :}$$

$$I = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\cdot\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)dx,$$

les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{1}{2}]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} + \mathrm{J},
\end{aligned}$$

d'où : $\boxed{\mathrm{I} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \mathrm{J}}$. On en déduit que $\mathrm{J} = \mathrm{I} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}}$.

3. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}+\mathrm{J} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{K}.
\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs obtenues aux questions précédentes, on en déduit que

$$\boxed{\mathrm{K} = \frac{\pi}{6}}$$

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. 1.1) La fonction cos est bornée par -1 et 1 sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2x - 1 \leq g(x) \leq 2x + 1.$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty}(2x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(2x-1) = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Pour répondre à la question, on utilise le théorème de la bijection puisque l'équation $g(x) = y$ ne se résout pas.

- g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2 - \sin(x) > 0$ car sin est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi g est strictement monotone.
- De plus, g est continue.

Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in g(\mathbb{R})$, l'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α dans la suite de l'exercice.

1.2) On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

Le tableau de variations de g nous permet d'affirmer que :

- $g(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.
- $g(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty, \alpha[$

2. 2.1)

- Étude du domaine :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff g(x) > 0 \iff x \in]\alpha, +\infty[$$

d'après la question précédente. Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_f =]\alpha, +\infty[}$.

- Calculons les limites. On a $\lim\limits_{x \to \alpha^+} g(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ par composition avec ln. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ par composition avec ln.

2.2) La fonction f est dérivable par composition sur $\mathrm{I} =]\alpha, +\infty[$ et sur cet intervalle, on a $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} > 0$ d'après les questions précédentes. La fonction f est donc strictement croissante sur I :

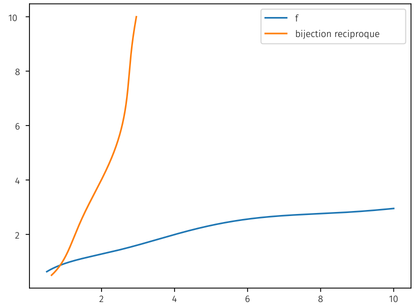
x	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Elle réalise donc une $\boxed{\text{bijection de } \mathscr{D}_f \text{ vers } \mathrm{J} = \mathbb{R}}$.

3. 3.1)

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def trace_fbij():
    X = np.linspace(0.5, 10, 10**3)
    Y = [np.log(2*x+np.cos(x)) for x in X]
    plt.plot(X, Y, label="f")
    plt.plot(Y, X, label="bijection reciproque")
    plt.legend()
trace_fbij()
```



3.2) On a que f est dérivable sur I et pour tout $x \in$ I, $f'(x) \neq 0$. Ainsi, $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur J}}$.

3.3) On a $\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$. De plus $f(0) = \ln(1) = 0$ donc $0 = f^{-1}(0)$ et on obtient alors :

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{g(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2-\sin(0)} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Solution (exercice 6) Énoncé

1. On donne deux versions de cette fonction, dont l'une minimise le nombre de multiplications et évite le symbole $**$.

```
def f(x, n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S += (1+x)**k
    return S
```

```
>>> f(2, 10)
29524
```

On peut proposer ensuite une version où l'on gare en mémoire la valeur de $(1+x)^k$ pour en déduire celle de $(1+x)^{k+1}$.

```
def f(x, n):
    S = 0
    X = 1 # on initialise une variable X à 1=(1+x)^0
    for k in range(n):
        S += X
        X *= (1+x) #X contient désormais la valeurs de \
        ↪ (1+x)^{k+1}
    return S
```

```
>>> f(2, 10)
29524
```

2. 2.1) Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $1+x \neq 1$ et le résultat est immédiat d'après la formule d'une somme géométrique :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1+x)^k = \frac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)} = \boxed{\frac{(1+x)^n-1}{x}},$$

en multipliant haut et bas par -1.

2.2) Il faut vérifier à part le cas $x=0$ puisque la formule précédente est vraie que pour $x \neq 0$.

- D'une part, on a donc :
$$f(0) = \sum_{k=0}^{n-1}(1+0)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$
D'autre part,
$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}0^{k-1} = \binom{n}{1}0^0 + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}0^{k-1} = \binom{n}{1} = n$$
car $0^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$ L'égalité est donc vérifiée pour $x=0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left((1+x)^n-1\right) \text{ d'apres la question precedente} \\ &= \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} - 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k + \binom{n}{0}x^0 - 1\right) \\ &= \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}. \end{aligned}$$
d'apres la formule du binôme de NEWTON

On a bien montré : $\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. 3.1) Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_0^x t^p \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^x = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{0^{p+1}}{p+1} = \boxed{\frac{x^{p+1}}{p+1}},$$

$$\int_0^x (1+t)^p \,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{p+1}}{p+1}\right]_0^x = \frac{(1+x)^{p+1}}{p+1} - \frac{(1+0)^{p+1}}{p+1} = \boxed{\frac{(1+x)^{p+1}-1}{p+1}}.$$

3.2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- En utilisant la définition de f et la question précédente on a :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(1+t)^k\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (1+t)^k\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+x)^{k+1}-1}{k+1}.$$

- En utilisant l'expression de f obtenue en 2.2) et la question précédente on a :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{k-1}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{k}.$$

On obtient bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1+x)^{k+1}-1}{k+1}}.$$

3.3) En appliquant l'inégalité précédente en $x=-1$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1-1)^{k+1}-1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{-1}{k+1} = \boxed{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

Ce qui, une fois divisée par -1, nous donne bien le résultat attendu.

4. 4.1) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la définition de $f(x)$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1+x)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i 1^{k-i}\right)$$

d'apres la formule du binôme de Newton

$$= \sum_{0\leq i\leq k\leq n-1}\binom{k}{i}x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}x^i\right) = \boxed{\sum_{i=0}^{n-1}x^i\left(\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\right)}.$$

4.2) Soit $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 2.2) :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}x^i$$

d'après la question 4.a) :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1}x^i\left(\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\right).$$

Les deux fonctions polynomiales :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}x^i, \quad \text{et} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1}x^i\left(\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\right)$$

sont ainsi égales, et elles ont donc les mêmes coefficients soit :

$$\forall i \in [\![0\,,\,n-1]\!], \quad \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i} = \binom{n}{i+1}.$$

La formule est encore vérifiée pour $i \geqslant n$ puisque les deux membres sont nuls (convention sur les coefficients binomiaux).