Séance 8 : Complexes, trigonométrie et applications

Exercice 1

Les quatre questions sont indépendantes.

1. Déterminer la forme exponentielle de $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\theta}$ avec $\theta \in [0\,; \frac{\pi}{2}[$, puis avec $\theta \in [\frac{\pi}{2}\,; \pi[$.

2. Linéariser $\cos^3(x)\sin(2x)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 2

Calculer $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kx)$ avec $x \neq k2\pi$ et $a \in \mathbb{R}$.
<u>*Aide :*</u> *On commencera par calculer* $T_n(x) = C_n(x) + \mathrm{i}\, S_n(x)$.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que :

$$\forall x \in]0\,;\,\pi[,\ \sum_{k=0}^{n-1} \sin\big((2k+1)x\big) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}$$

2. En déduire les solutions dans $]0\,;\,\pi[$ de l'équation :

$$\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$

Exercice 4

Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x + 2 \end{cases}$.

Déterminer, si possible, $g \circ f$ et $f \circ g$ et dire si ces deux applications sont égales.

Exercice 5

Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}\backslash\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3\} \\ x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2} \end{cases}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 6

Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective, bijective. Justifier les réponses.

1. $f : \begin{cases} [\![0, n]\!] \longrightarrow [\![1, n+1]\!] \\ k \longmapsto k + 1 \end{cases}$

2. $g : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ k \longmapsto k + 1 \end{cases}$

3. $h : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$