Séance 9 : Applications

Exercice 1

Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective, bijective. Justifier les réponses.

1. $f : \begin{cases} [\![0,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{cases}$

2. $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & k+1 \end{cases}$

3. $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & |x| \end{cases}$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etablir le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. La fonction f est-elle injective sur $\mathcal{D}_f$?
4. Proposer deux intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.

Exercice 3

On considère la fonction

$$f : x \longmapsto \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

1. Etudier complètement la fonction. (Ensemble de définition, parité, variations, limites aux bornes, asymptotes éventuelles).
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
4. Donner l'expression de la bijection réciproque.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

1. Montrer qu'elle est bijective de $[0\,; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle I à déterminer.
2. Justifier la continuité de la bijection réciproque et donner ses variations sur I.
3. Déterminer l'expression de la bijection réciproque.

Exercice 5

On considère la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \sin(2\arctan(x))$$

1. Etudier complètement la fonction. (Ensemble de définition, parité, variations, limites aux bornes, asymptotes éventuelles).
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-1\,;1]$ sur un ensemble J que l'on précisera.

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.