Programme de colles
du 19 au 23/1/2026

- Cette semaine : **1** question de cours dans la liste. Uniquement des questions de cours sur les limites suites cette semaine, pas encore d'exercices.

1 [MATHS] CALCUL MATRICIEL

Attention

- Au sujet des matrices inversibles : la technique d'échelonnement par pivot de Gauß (et par résolution d'un système linéaire) n'a pas encore été vue, elle le sera dans un futur chapitre. Seules les techniques listées ci-dessous sont au programme : définition, polynôme annulateur, à l'aide d'une forme diagonalisée. Ainsi, par exemple, « déterminer l'inverse de P » où P est une matrice 3×3 quelconque sans autre indication, est pour le moment hors-programme.
- Le déterminant est au programme uniquement en dimension 2.
- Les exercices faisant travailler sur le terme général plutôt que des tableaux : à garder plutôt pour la fin de la colle si le reste a été réussi.
- Bien sûr, en ce qui concerne les matrices diagonalisables, les élèves ne savent pas encore comme trouver la matrice P associée. L'idée est pour le moment uniquement de mettre en place la définition et mettre en garde par rapport aux confusions classiques avec d'autres notions (inversibilité par exemple). La seule application de la diagonalisation vue pour le moment est le calcul des puissances.
- Un TP d'info plus complet sur les tableaux numpy sera fait plus tard, mais n'hésitez pas à poser déjà en exercice une question demandant de coder une matrice sous forme de tableau numpy.

- **Matrices & Opérations.** Généralités, égalité matricielle, matrices usuelles (nulle, identique, homothétique, Attila, élémentaires). Opérations sur les matrices (somme, multiplication externe, multiplication interne). Transposition notée $A^\top$ et propriétés. Codage d'une matrice en Python.
- **Matrices carrées.** Puissances, règles, matrice nilpotente. Cas d'une matrice diagonale. Formule du binôme matriciel. Calcul des puissances à l'aide d'un polynôme annulateur. Inversibilité matricielle : définition, propriétés, équivalence d'un inverse à droite ou à gauche (admise), simplification matricielle par une matrice inversible, équation-produit où l'une des matrices est inversible. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires. Premières techniques de calcul d'inverses : existence d'un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cas d'une matrice 2×2 et définition du déterminant dans ce cas-là. Matrices semblables, diagonalisables et trigonalisables. Application au calcul de puissances. Reformulation d'une récurrence linéaire à l'aide d'une matrice.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir la notion de matrice inversible. Rappeler (avec hypothèses, puis démontrer) les formules :
$$(A \times B)^{-1} = \dots, \quad (A^\top)^{-1} = \dots.$$
2. Définir la notion de matrice inversible, et calculer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en commençant par montrer que $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.
3. Donner la définition de matrices semblables. Lorsque $A \sim B$, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n \sim B^n$.
4. Donner la définition de matrice diagonalisable. En utilisant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Expliquer oralement (sans donner tous les détails) comment obtenir J_2^n avec $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :
$$\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad A_{ij} = (i+j)^2.$$
Écrire une fonction d'en-tête `creer_matriceA(n)` qui renvoie A représentée en tableau `numpy`.
6. Citer le théorème d'encadrement. Application à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
7. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $H_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.
8. Citer le théorème de la limite monotone. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que : $(H_n)_{n \geq 1}$ est croissante, puis en déduire que $H_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$, en **admettant** que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

9. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$. Montrer que (S_n) converge en montrant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les suites numériques et les systèmes linéaires.