Devoir surveillé n° 4

samedi 17/01/2026

Durée : 3 h

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousses sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
-
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entrainent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
  - variables non quantifiées *(utiliser les symboles ∀, ∃, etc. appropriés.)*
  - confusion entre égalité = et équivalence $\Longleftrightarrow$,
  - « la fonction $f(x)$ »,
  - un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Questions de cours Agro-Véto

1. Inversibilité d'une matrice carrée 2×2.
2. Matrices semblables : définition.
3. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$?

Exercice 2 |

[Solution] Résoudre sur $]0,\pi[$ l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{\tan x}y = \cos x. \quad \textit{La fonction } \frac{1}{\tan} \textit{ désigne ici la fonction } \frac{\cos}{\sin}.$$

Exercice 3 |

[Solution] On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n > 0$.
2. On définit alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad v_n = \ln(u_n)$.
   - **2.1)** Montrer que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \ln(2)$.
   - **2.2)** En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 4 |

[Solution] Si y est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note y''' sa dérivée troisième, on a ainsi : $\quad y''' = (y'')'$.

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et solutions de l'équation différentielle

$$y''' = y. \quad (\star)$$

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x).$$

1. Déterminer une fonction usuelle (autre que la fonction nulle) solution de l'équation $(\star)$.
2. Montrer que f est une solution de $(\star)$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle d'ordre un que l'on déterminera.
3. En déduire que f est une solution de $(\star)$ si et seulement s'il existe une constante réelle λ telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f''(x) + f'(x) + f(x) = \lambda e^x. \quad \text{(E)}$$

4. **4.1)** Résoudre l'équation homogène (H) associée à (E).

4.2) Montrer que (E) admet une solution particulière y_0 de la forme $y_0(x) = \alpha e^x$, où α est un réel (dépendant de λ) que l'on précisera.

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

Problème 1 | Calcul matriciel et suites récurrentes [Solution]

Partie I — Puissances d'une matrice

On considère les matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **1.1)** Vérifier que : $P^3 - 2P^2 - 9I_3 = 0_{3,3}$.

1.2) En déduire que P est inversible et donner son inverse.

2. En déduire que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire $T = D + N$ avec D une matrice diagonale et N une matrice nilpotente. Vérifier que N est bien nilpotente.

4. En déduire T^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

5. Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}$.

6. En déduire la *(magnifique)* formule suivante :

$$A^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} (5+3n)(-1)^n + 2^{n+2} & 2^{n+3} - (8+3n)(-1)^n & 2^{n+2} - (4+6n)(-1)^n \\ 2^{n+1} - (2+3n)(-1)^n & (5+3n)(-1)^n + 2^{n+2} & (6n-2)(-1)^n + 2^{n+1} \\ (3n-1)(-1)^n + 2^n & 2^{n+1} - (2+3n)(-1)^n & (8-6n)(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Partie II — Application à un système de dynamique des populations.

L'ombre commun est un poisson de rivière froide, pure et à cours relativement lent que l'on trouve généralement plus en aval que les truites. On décompose leur population en trois catégories d'âge.

- Les jeunes de moins d'un an sont tous immatures, donc ne se reproduisent pas.
- Les poissons ayant entre un et deux ans donnent en moyenne naissance à trois jeunes poissons chaque année.
- Entre deux et trois ans, les poissons adultes donnent en moyenne naissance à deux jeunes poissons chaque année.

On considère enfin que les ombres ne vivent pas plus que trois ans. À l'année n, on note a_n, b_n, c_n le nombre respectif de poissons âgés de moins d'un an, ayant entre un et deux ans, et âgés de plus de deux ans. On note aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On suppose enfin qu'il y avait au départ (année 0) seulement 10 ombres de plus de deux ans, aucun de moins d'un an et aucun entre un et deux ans.

7. Préciser X_0, et justifier à l'aide du texte que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.

8. On note $d_n = a_n + b_n + c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans cette question, on souhaite conjecturer à l'aide d'un code Python l'existence éventuelle des limites ci-dessous :

$$p_a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n}, \quad p_b = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{d_n}, \quad p_c = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n}.$$

On supposera dans toute cette question que le module `numpy` aura été importé de la manière suivante :

```
import numpy as np
```

8.1) Écrire une commande permettant de représenter les matrices A et X_0 dans deux tableaux `numpy` `A` et `X_0`.

8.2) Recopier et compléter le code ci-dessous, de la fonction `X(n)`, prenant en argument un entier n et renvoyant les trois listes :

$$L_a = \left[\frac{a_0}{d_0}, \dots, \frac{a_n}{d_n}\right], \quad L_b = \left[\frac{b_0}{d_0}, \dots, \frac{b_n}{d_n}\right], \quad L_c = \left[\frac{c_0}{d_0}, \dots, \frac{c_n}{d_n}\right].$$

On supposera donc ici que les tableaux `A` et `X_0` ont été correctement crées.

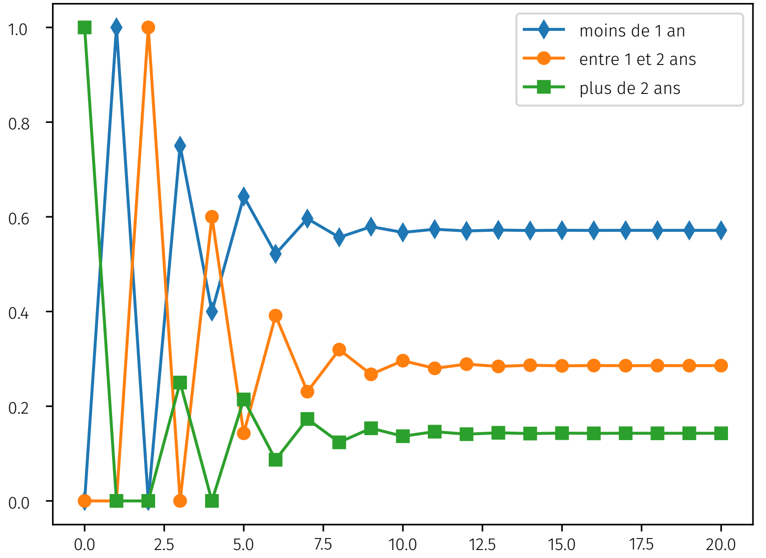
```
def X(n):
    X_n = np.copy(X_0)
    d_n = X_n[0]+X_n[1]+X_n[2]
    L_a, L_b, L_c = [X_n[0]/d_n], [_________], [_________]
    for _ in range(_________):
        X_n = A @ X_n
        d_n = X_n[0]+X_n[1]+X_n[2]
        L_a.append(_________)
        L_b.append(_________)
        L_c.append(_________)
    return L_a, L_b, L_c
```

Le code ci-dessous permet alors de tracer les trois suites en fonction du temps.

```
L_a, L_b, L_c = X(20)
plt.plot(L_a, label = "moins de 1 an", marker = 'd')
```

```
plt.plot(L_b, label = "entre 1 et 2 ans", marker = 'o')
plt.plot(L_c, label = "plus de 2 ans", marker='s')
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient alors le dessin ci-dessous :



Que peut-on conjecturer sur les trois limites? Interpréter en terme de dynamique des populations.

9. Dans cette question, on souhaite établir la conjecture faite précédemment.

9.1) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.

9.2) En déduire le terme général des suites (a_n), (b_n) et (c_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

9.3) Retrouver les valeurs de p_a, p_b et p_c.

Fin du sujet

Correction
Devoir surveillé n° 4
samedi 17/01/2026

Solution (exercice 2) [Énoncé]

Résolution de l'homogène. Comme $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \sin x$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\ln|\sin x|} = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\ln|\sin x|}} = \frac{\lambda}{|\sin x|} = \frac{\lambda}{\sin x},$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La dernière égalité résultant du fait que la fonction sinus est strictement positive sur $]0,\pi[$.

Recherche d'une solution particulière. On applique ensuite la méthode de variation de la constante, puisque les coefficients sont non constants, en recherchant une solution particulière de l'équation avec second membre non nul sous la forme $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{\sin x}$, où λ est une fonction dérivable sur $]0,\pi[$. On a $y_0'(x) = \frac{\lambda'(x)\sin x - \lambda(x)\cos x}{\sin^2 x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} & y_0 \text{ est solution} \\ \iff & \forall x \in]0,\pi[, \quad \frac{\lambda'(x)\sin x - \cancel{\lambda(x)\cos x}}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} \frac{\cancel{\lambda(x)}}{\sin x} = \cos x \\ \iff & \forall x \in]0,\pi[, \quad \lambda'(x) = \sin x \cos x. \end{aligned}$$

On choisit $\lambda(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$, d'où $y_0(x) = \frac{\lambda(x)}{\sin x} = \frac{1}{2}\sin x$. Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{\sin x} + \frac{1}{2}\sin x \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$.

Initialisation. On a $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$, de sorte que $u_n > 0$. Par stricte croissance de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient $\sqrt{u_n} > \sqrt{0}$ et donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

2. 2.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(2\sqrt{u_n}\right) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(u_n) = \frac{1}{2}v_n + \ln(2).$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \ln(2)}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.

2.2) On commence par chercher $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + \ln(2) \iff \ell = 2\ln(2).$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - 2\ln(2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 2\ln(2) \\ &= \frac{1}{2}v_n + \ln(2) - 2\ln(2) \\ &= \frac{1}{2}v_n - \ln(2) \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 2\ln(2)) \\ &= \frac{1}{2}w_n. \end{aligned}$$

La suite (w_n) est alors géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$w_0 = v_0 - 2\ln(2) = \ln(u_0) - 2\ln(2) = \ln(1) - 2\ln(2) = -2\ln(2).$$

D'où : $w_n = -2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis : $v_n = 2\ln(2) - 2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Sachant que $v_n = \ln(u_n)$, on a : $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$. D'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{e}^{2\ln(2) - 2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(4)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\ln(4)}\right)^{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = 4^{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}}.$$

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. On vérifie sans peine que exp est une solution non nulle.

2. Comme $g' = f' + f'' + f'''$, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (\star) &\iff f''' = f \\ &\iff g' - f' - f'' = f \iff g' = f + f' + f'' = g \\ &\iff \boxed{g' = g}. \end{aligned}$$

3. L'équation différentielle $y' = y$ est homogène, d'ordre 1, à coefficients constants. Les solutions sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi f est une solution de $(\star)$ si et seulement s'il existe une constante réelle λ telle que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f'(x) + f(x) = \lambda \mathrm{e}^x. \quad \text{(E)}}$$

On résout donc dans la suite $y'' + y' + y = \lambda \mathrm{e}^x$.

4. 4.1) On résout ici $y'' + y' + y = 0$. L'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$

a pour racines $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, les solutions de l'équation homogène (H) sont donc les fonctions :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \left\{ x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(\mathrm{A} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \mathrm{B} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \,\middle|\, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

4.2) Soit y_0 la fonction définie par $y_0(x) = \alpha \mathrm{e}^x$, où α. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0'(x) = \alpha \mathrm{e}^x, \quad y_0''(x) = \alpha \mathrm{e}^x.$$

Donc y_0 solution de (E) si, et seulement si, :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3\alpha \cancel{\mathrm{e}^x} = \lambda \cancel{\mathrm{e}^x}$$

$$\iff 3\alpha = \lambda \iff \alpha = \frac{\lambda}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{y_0 : x \longmapsto \frac{\lambda}{3}\mathrm{e}^x \text{ est une solution particulière de (E).}}$

5. On peut à présent conclure :

$$\begin{aligned} & f \quad \text{est solution de } (\star) \\ \iff & f''' = f \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \text{ est solution de (E)} \\ \iff & \exists (\lambda, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(\mathrm{A} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \mathrm{B} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{\lambda}{3} \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions de l'ensemble :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(\mathrm{A} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \mathrm{B} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + \frac{\lambda}{3} \mathrm{e}^x \,\middle|\, (\lambda, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^3 \right\}}.$$

Solution (problème 1) [Énoncé]

PARTIE I — PUISSANCES D'UNE MATRICE On considère les matrices ci-dessous :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. 1.1) On a $\mathrm{P}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 10 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P}^3 = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 20 \\ 2 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ après calculs. Donc :

$$\mathrm{P}^3 - 2\mathrm{P}^2 - 9\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 20 \\ 2 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -6 & 20 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 0_{3\times 3}.$$

En conclusion : $\boxed{\mathrm{P}^3 - 2\mathrm{P}^2 - 9\mathrm{I}_3 = 0_{3,3}}$.

1.2) On a prouvé que $\mathrm{P}^3 = 2\mathrm{P}^2 + 9\mathrm{I}_3$, d'où $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{P}^2 - 2\mathrm{P}}{9}\right) = \mathrm{I}_3$, soit $\mathrm{P}^{-1} = \frac{\mathrm{P}^2 - 2\mathrm{P}}{9} = \boxed{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2. On calcule simplement le produit des trois matrices :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P} &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{T}}. \end{aligned}$$

3. Posons $\boxed{\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(-1, -1, 2)}$. Alors N est nilpotente, puisque $\mathrm{N}^2 = 0_{3,3}$.

4. Les matrices N et D commutent. Donc d'après la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^n = (\mathrm{N} + \mathrm{D})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k (\mathrm{D})^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k (\mathrm{D})^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k (\mathrm{D})^{n-k}}_{=0} \\ &= 1 \times \mathrm{N}^0 \times \mathrm{D}^n + n \times \mathrm{N}^1 \mathrm{D}^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

5. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1}$.

Initialisation. Pour $n=0$, on a $\mathrm{PT}^0\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}_3$.

Hérédité. Supposons que $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors

$$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}^n\mathrm{A} = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PTP}^{-1} = \mathrm{PT}^n\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PT}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}.$$

On a ainsi prouvé que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+3n)(-1)^n & -(5+3n)(-1)^n & (2-6n)(-1)^n \\ 2(-1)^n & 3(-1)^{n+1} & 6(-1)^{n+1} \\ 2^n & 2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} (5+3n)(-1)^n + 2^{n+2} & 2^{n+3} - (8+3n)(-1)^n & 2^{n+2} - (4+6n)(-1)^n \\ 2^{n+1} - (2+3n)(-1)^n & (5+3n)(-1)^n + 2^{n+2} & (6n-2)(-1)^n + 2^{n+1} \\ (3n-1)(-1)^n + 2^n & 2^{n+1} - (2+3n)(-1)^n & (8-6n)(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

Partie II — Application à un système de dynamique des populations

7. On a d'après le texte : $\boxed{\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$a_{n+1} = 3b_n + 2c_n, \quad b_{n+1} = a_n, \quad c_{n+1} = b_n$$

puisque :

- a_{n+1} correspond au nombre de bébés de la génération précédente, soit 3 enfants pour les plus jeunes adultes, et 2 pour les plus âgés.
- b_{n+1} correspond aux poissons ayant entre 1 et 2 ans à la génération $n+1$, ce sont donc exactement ceux qui avaient moins d'1 an à la génération précédente.
- c_{n+1} correspond aux poissons ayant plus de 2 ans à la génération $n+1$, ce sont donc exactement ceux qui avaient entre 2 et 3 ans à la génération précédente.

Ces trois relations s'écrivent aussi :

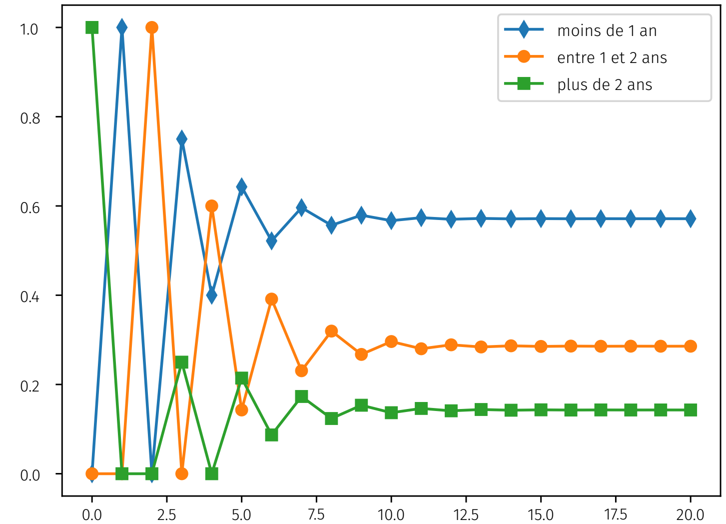
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n}.$$

8. **8.1)**

```
>>> A = np.array([[0, 3, 2], [1, 0, 0], [0, 1, 0]])
>>> X_0 = np.array([[0], [0], [10]])
```

8.2)

```
def X(n):
    X_n = np.copy(X_0)
    d_n = X_n[0]+X_n[1]+X_n[2]
    L_a, L_b, L_c = [X_n[0]/d_n], [X_n[1]/d_n], \
    ↪ [X_n[2]/d_n]
    for _ in range(n):
        X_n = A @ X_n
        d_n = X_n[0]+X_n[1]+X_n[2]
        L_a.append(X_n[0]/d_n)
        L_b.append(X_n[1]/d_n)
        L_c.append(X_n[2]/d_n)
    return L_a, L_b, L_c
L_a, L_b, L_c = X(20)
plt.plot(L_a, label = "moins de 1 an", marker = 'd')
plt.plot(L_b, label = "entre 1 et 2 ans", marker = 'o')
plt.plot(L_c, label = "plus de 2 ans", marker='s')
plt.legend()
plt.show()
```



On conjecture alors que les trois limites existent, et que :

$$p_a \approx 0.6, \quad p_b \approx 0.25, \quad p_c \approx 0.15.$$

Les proportions d'individus pour chaque classe d'âge se stabilisent donc autour de trois valeurs.

9. Dans cette question, on souhaite établir la conjecture faite précédemment.

9.1) **Initialisation.** Comme $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_3$, la propriété est bien initialisée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$. Alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 = A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

hypothèse de réc.

On a donc par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{X_n = A^n X_0}$.

9.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de calculer le produit matriciel $A^n X_0$. On trouve alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \boxed{\frac{10}{9}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - (4+6n)(-1)^n \\ (6n-2)(-1)^n + 2^{n+1} \\ 2^n + (8-6n)(-1)^n \end{pmatrix}}$$

9.3) On a après calculs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n = \frac{10}{9}\left(7 \times 2^n + (2-6n)(-1)^n\right).$$

On déduit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \cancel{\frac{10}{9}} \times \frac{2^{n+2} - (4+6n)(-1)^n}{\cancel{\frac{10}{9}}(7 \times 2^n + (2-6n)(-1)^n)} \\ &= \frac{2^{n+2} - (4+6n)(-1)^n}{7 \times 2^n + (2-6n)(-1)^n} = \frac{4 - (4+6n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{7 + (2-6n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \\ &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \boxed{\frac{4}{7} = p_a}, \end{aligned}$$

puisque $\lim_{n\longrightarrow\infty} (4+6n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ par croissances comparées et comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, de-même pour $\lim_{n\longrightarrow\infty} (2-6n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$). De la même panière manière, on trouve :

$$\boxed{p_b = \frac{2}{7}}, \quad \boxed{p_c = \frac{1}{7}}.$$