Programme de colles

du 26 au 30/1/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste. **Pas d'informatique sur les suites en dehors des questions de cours, nous n'avons pas encore terminé le TP.**

1 [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES

- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers $\pm\infty$ par majoration/minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'EULER. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites récurrentes : que des exercices guidés avec questions intermédiaires. Poser « étudier telle suite récurrente » sans questions intermédiaires n'est pas dans l'esprit du programme (sauf si la récurrence est usuelle bien sûr).
- Au sujet des suites implicites : l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Citer le théorème d'encadrement et rappeler la définition de la partie entière. Application à : $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
3. Citer le théorème de la limite monotone. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $(\mathrm{H}_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puis en déduire que $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, en **admettant** que $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$. Montrer que (S_n) converge en montrant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
5. Rappeler les équivalents usuels ci-dessous :
$$\cos u_n - 1, \quad (1+u_n)^\alpha - 1, \quad \ln(1+u_n)$$
sous une hypothèse à rappeler portant sur (u_n). Déterminer : $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \arctan(v_n).$$
En admettant que $\arctan x \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que (v_n) converge et que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer l'existence d'une unique suite (x_n) vérifiant $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) est décroissante. *(Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe $f_{n+1}(x_n)$ (version du cours) ou de $f_n(x_{n+1})$...)*
8. On considère la suite (v_n), définie par :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + \mathrm{e}^{v_n}. \end{cases}$$
Écrire une fonction d'en-tête `terme_v(a, n)` qui renvoie la valeur de v_n.
9. On considère la suite (w_n), définie par :
$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{5}{6} w_{n+1} - \frac{1}{6} w_n. \end{cases}$$
Écrire une fonction d'en-tête `terme_w(a, b, n)` qui renvoie la valeur de w_n.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).

- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les systèmes puis le dénombrement.