Programme de colles

du 2 au 6/2/2026

- Cette semaine : **1** question de cours dans la liste. Vous pouvez désormais poser de l'informatique sur les suites. Concernant l'échelonnement et les systèmes ; privilégiez un exercice rapide de calcul d'inverse de matrice ou de résolution d'un système pour commencer afin de vérifier l'algorithme, puis embrayez sur un exercice sur les suites en essayant d'y consacrer la majeure partie de la colle. Une question de cours sur le sujet peut très bien suffire.

1 [MATHS] ÉCHELONNEMENT & SYSTÈMES LINÉAIRES

- **Échelonnement matriciel.** Opérations élémentaires, traduction matricielle. Notion de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite, de pivot. Rang d'une matrice définie comme le nombre de pivots.
- **Systèmes linéaires.** Définition. Matrice associée à un système, écriture matricielle. Système de Cramer. Structure de l'ensemble des solutions. Méthode par substitution sur des systèmes simples. Méthode par échelonnement : présentation sous forme de matrice augmentée, ou de système directement, notion d'inconnue principale et d'inconnue auxiliaire, nombre en fonction du rang. Équivalence de systèmes, et justification du fait que l'échelonnement conduit à un système équivalent.
- **Échelonnement et inversibilité.** Équivalence entre : matrice inversible de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, son rang valant n, son échelonnée réduite est I_n et tout système associé est de Cramer. Nouvelles méthodes de calcul de l'inverse : miroir et résolution d'un système associé.
- **Matrice $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n$.** Remarques générales sur les opérations autorisées pour gérer l'échelonnement d'un système ou matrice à paramètre. Recherche des λ tels que $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n$ ne soit pas inversible sur plusieurs exemples : matrice 2×2 et 3×3.

2 [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES

- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers $\pm\infty$ par majoration/minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'Euler. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.
- **Informatique.** Fonctions permettant de :
  - calculer un terme donné d'une suite,
  - calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois,
  - de construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée,
  - tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites récurrentes : que des exercices guidés avec questions intermédiaires. Poser « étudier telle suite récurrente » sans questions intermédiaires n'est pas dans l'esprit du programme (sauf si la récurrence est usuelle bien sûr).
- Au sujet des suites implicites : l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Trouver, selon deux méthodes (échelonnement et déterminant), les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_2$ ne soit pas inversible lorsque $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$.

2. Trouver, par échelonnement, les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible lorsque $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. *(Réponse : $\lambda = \pm 3$)*

3. Rappeler les équivalents usuels ci-dessous :

$$\cos u_n - 1, \quad (1+u_n)^\alpha - 1, \quad \ln(1+u_n)$$

sous une hypothèse à rappeler portant sur (u_n). Déterminer : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \arctan(v_n).$$

En admettant que :

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad [\arctan x \leqslant x \quad \text{et} \quad \arctan(x) = x \iff x = 0]$,
- (v_n) est bien définie et positive,

montrer que (v_n) converge et que : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = 0$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer l'existence d'une unique suite (x_n) vérifiant $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) est décroissante. *(Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe $f_{n+1}(x_n)$ (version du cours) ou de $f_n(x_{n+1})$...)*

6. On considère la suite (v_n), définie par :

$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + e^{v_n}. \end{cases}$$

Écrire une fonction d'en-tête `terme_v(a, n)` qui renvoie la valeur de v_n.

7. On considère la suite (w_n), définie par :

$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{5}{6} w_{n+1} - \frac{1}{6} w_n. \end{cases}$$

Écrire une fonction d'en-tête `terme_w(a, b, n)` qui renvoie la valeur de w_n.

Pour les élèves : rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : le dénombrement.