Programme de colles
du 23 au 27/2/2026

- Cette semaine : <u>**1**</u> question de cours dans la liste. Cette semaine, sur les polynômes, uniquement des questions de cours.

1 [MATHS] ÉCHELONNEMENT & SYSTÈMES LINÉAIRES

- **Échelonnement matriciel.** Opérations élémentaires, traduction matricielle. Notion de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite, de pivot. Rang d'une matrice définie comme le nombre de pivots.
- **Systèmes linéaires.** Définition. Matrice associée à un système, écriture matricielle. Système de CRAMER. Structure de l'ensemble des solutions. Méthode par substitution sur des systèmes simples. Méthode par échelonnement : présentation sous forme de matrice augmentée, ou de système directement, notion d'inconnue principale et d'inconnue auxiliaire, nombre en fonction du rang. Équivalence de systèmes, et justification du fait que l'échelonnement conduit à un système équivalent.
- **Échelonnement et inversibilité.** Équivalence entre : matrice inversible de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, son rang valant n, son échelonnée réduite est I_n et tout système associé est de CRAMER. Nouvelles méthodes de calcul de l'inverse : miroir et résolution d'un système associé.
- **Matrice $A-\lambda I_n$.** Remarques générales sur les opérations autorisées pour gérer l'échelonnement d'un système ou matrice à paramètre. Recherche des λ tels que $A-\lambda I_n$ ne soit pas inversible sur plusieurs exemples : matrice 2×2 et 3×3.

2 [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES, DÉNOMBREMENT.

- **Compléments sur les ensembles.** Extension des définitions de réunion, intersection, complémentaire, différence vues en début d'année. Lois de MORGAN et règles opératoires. Notion de partition d'un ensemble.
- **Dénombrement.** Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit cartésien, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis. Listes, permutations, combinaisons, cardinals associés. Propriétés des coefficients binomiaux à l'aide du dénombrement.

Remarques pour les colleurs :

1. *En 1er exercice sur le sujet, merci de privilégier un exercice avec « protocole de dénombrement » dans des contextes concrets (construction de l'objet à compter via choix successifs). Idéalement, des contextes probabilistes (urnes, boules et compagnie).*
2. *Les exercices théoriques ne sont pas dans l'esprit du programme.*

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Trouver, selon deux méthodes (échelonnement et déterminant), les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $A-\lambda I_2$ ne soit pas inversible lorsque $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$.
2. Trouver, par échelonnement, les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $A-\lambda I_3$ ne soit pas inversible lorsque $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\-2&1&-2\\1&-2&-2\end{pmatrix}$. *(Réponse : $\lambda=\pm 3$)*
3. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Écrire la définition (avec accolades) de $\bigcap_{i\in I}A_i, \bigcup_{i\in I}A_i$, et rappeler les lois de MORGAN.
4. Soit E un ensemble. Donner la définition de *partition* $(A_i)_{i\in I}$ de E. Si $B\subset E$, donner alors une partition de B.
5. Soient $A, B\subset E$. Rappeler les formules donnant $\mathrm{Card}(B\setminus A)$ et $\mathrm{Card}(A\cup B)$. Démontrer ces deux formules.
6. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0\leqslant p\leqslant n$. Donner le nombre de p-listes, et le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n. Justifier ces deux formules.
7. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0\leqslant p\leqslant n$. Donner le nombre de p-combinaisons d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n, et le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n. Déduire le nombre d'anagrammes de CHEVAL et ANANAS.

8. Définir ce qu'on appelle racine d'un polynôme P, et donner le résultat de caractérisation d'une racine par factorisation. En remarquant que 1 est racine de $P = X^3 - 2X + 1$, factoriser P sous la forme $(X-1)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ à déterminer.
9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 4$. Déterminer le degré et coefficient dominant de $Q = 4XP - X^2P'$.

À venir : le dénombrement et les polynômes.