Programme de colles
du 2 au 6/3/2026

- Cette semaine : **1** question de cours dans la liste.

1 [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES ENSEMBLES, DÉNOMBREMENT.

- **Compléments sur les ensembles.** Extension des définitions de réunion, intersection, complémentaire, différence vues en début d'année. Lois de MORGAN et règles opératoires. Notion de partition d'un ensemble.
- **Dénombrement.** Cardinal d'un ensemble fini : sous-ensemble fini, partition, cardinal d'une réunion, cardinal d'un produit cartésien, nombre de parties d'un ensemble, cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis. Listes, permutations, combinaisons, cardinals associés. Propriétés des coefficients binomiaux à l'aide du dénombrement.

Remarques pour les colleurs :

1. *En 1er exercice sur le sujet, merci de privilégier un exercice avec « protocole de dénombrement » dans des contextes concrets (construction de l'objet à compter via choix successifs). Idéalement, des contextes probabilistes (urnes, boules et compagnie).*
2. *Les exercices théoriques ne sont pas dans l'esprit du programme.*

2 [MATHS] POLYNÔMES.

Pour les élèves : il est très (très très, même) fortement conseillé de revoir le chapitre sur les complexes par la même occasion, en accentuant vos révisions sur la résolution d'équations (second degré, $z^n = \alpha$, ...)

Attention

- Les polynômes sont vus comme des fonctions polynomiales en BCPST.
- En arithmétique : rien du tout à part le symbole de divisibilité (je n'ai même pas donné de propriétés).
- Les notions de polynôme irréductible, scindé, la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ sont hors-programme. Les relations coefficients/racines sont au programme uniquement pour le degré 2.
- La caractérisation de la multiplicité exacte avec le polynôme dérivé est hors-programme : seul le résultat « λ est une racine multiple de P si, et seulement si, $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ » l'est.

- **Définition de $\mathbb{K}[X]$.** Définition, degré, coefficient dominant, cas du polynôme nul, opérations (somme, produit, multiplication par un réel/complexe, composition). Propriétés du degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}_{=n}[X]$. Équation-produit sur $\mathbb{K}[X]$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$). Représentation d'un polynôme par une liste : fonction degré, évaluation (méthode naïve), dérivation, multiplication par X.
- **Polynôme dérivé.** Définition de la dérivée première, dérivées successives. Propriétés de la dérivation (immédiates pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, admises pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Degré et dérivation. Unicité des coefficients d'un polynôme.
- **Racines.** Divisibilité d'un polynôme par un autre. Définition d'une racine. Tout polynôme de degré impair possède une racine réelle. Racines multiples : définition et lien avec le polynôme dérivé. Comptage de racines.
- **Factorisation.** Allure de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, exemples de recherche de racines. Retour sur la résolution de $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Relations coefficients / racines pour le degré 2.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Écrire la définition (avec accolades) de $\bigcap_{i\in I} A_i, \bigcup_{i\in I} A_i$, et rappeler les lois de MORGAN.
2. Soit E un ensemble. Donner la définition de *partition* $(A_i)_{i\in I}$ de E. Si $B \subset E$, donner alors une partition de B.
3. Soient $A, B \subset E$. Rappeler les formules donnant $\mathrm{Card}(B \setminus A)$ et $\mathrm{Card}(A \cup B)$. Démontrer ces deux formules.
4. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Donner le nombre de p-listes, et le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n. Justifier ces deux formules.
5. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Donner le nombre de p-combinaisons d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n, et le nombre

de permutations d'un ensemble E de cardinal n. Déduire le nombre d'anagrammes de CHEVAL et ANANAS.

6. Définir ce qu'on appelle racine d'un polynôme P, et donner le résultat de caractérisation d'une racine par factorisation. En remarquant que 1 est racine de $P = X^3 - 2X + 1$, factoriser P sous la forme $(X-1)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ à déterminer.

7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 4$. Déterminer le degré et coefficient dominant de $Q = 4XP - X^2P'$.

8. Réciter et compléter : « Si P possède strictement plus de racines que …, alors … ». Application : soit $n \geqslant 0$ un entier, $C \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P(k) = C. \quad \text{Montrer que } P = C.$$

9. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Définir « λ est racine de P de multiplicité k », et « λ est une racine multiple de P ». Reformuler la seconde à l'aide du polynôme dérivé.

10. Définir $P \mid Q$ pour deux polynômes P, Q. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1.$$

Rappel pour les élèves : vous avez deux méthodes au choix. L'une des méthodes consiste à écrire $(X+1)^n - nX - 1$ *sous la forme* X^2Q *avec* $Q \in \mathbb{R}[X]$ *en utilisant la formule du binôme. L'autre se situe dans un autre exemple où l'on montre que* 0 *est racine de multiplicité au moins deux à l'aide de la dérivée.*

À venir : les probabilités.